

Modello di Malthus.

(adattato da <http://calvino.polito.it/~mazzi/analisi%20II/Malthus.pdf>)

Il modello di Malthus, che risale al 1798, si propone di descrivere matematicamente l'evoluzione di una popolazione in presenza di risorse illimitate e in assenza di predatori o antagonisti per l'utilizzo delle risorse. Sotto queste ipotesi, i fattori di evoluzione sono essenzialmente il tasso di natalità ed il tasso di mortalità. Introduciamo quindi le funzioni:

$$\begin{aligned} N(t) &= \text{numero di individui al tempo } t. \\ \lambda &= \text{tasso di natalità} \\ &= \text{numero di nati per individuo per unità di tempo.} \\ \mu &= \text{tasso di mortalità} \\ &= \text{numero di morti per individuo per unità di tempo.} \end{aligned}$$

In un tempo h avremo $\lambda h N(t)$ nuovi nati e $\mu h N(t)$ morti. Dunque la differenza di popolazione in un intervallo di tempo h sarà:

$$N(t+h) - N(t) = \lambda h N(t) - \mu h N(t)$$

Dividendo per il tempo trascorso si ottiene un tasso di crescita:

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = \lambda N(t) - \mu N(t) = (\lambda - \mu) N(t).$$

Se si assume che $N(t)$ vari con continuità, cioè possa assumere tutti i valori reali (ipotesi ragionevole quando la popolazione è composta da un numero molto elevato di individui) si può passare al limite per h che tende a 0:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = N'(t) = (\lambda - \mu) N(t)$$

cioè:

$$N'(t) = \varepsilon N(t)$$

avendo posto $\varepsilon = \lambda - \mu =$ potenziale biologico della popolazione.

Questa equazione (equazione differenziale lineare del primo ordine) ha come soluzioni tutte le funzioni $N(t) = k e^{\varepsilon t}$, per $k \in \mathbf{R}$ ed in particolare, se la popolazione all'istante t_0 è composta di $N(t_0)$ individui, la sua evoluzione nel tempo è data dalla soluzione esponenziale (da cui il nome):

$$N(t) = N(t_0) e^{\varepsilon(t-t_0)}$$

Se $\varepsilon > 0$, vale a dire se i nati superano i morti, la popolazione cresce esponenzialmente, se invece $\varepsilon < 0$, la popolazione tende ad estinguersi esponenzialmente e se $\varepsilon = 0$ la popolazione rimane costante.

Nel caso di due popolazioni (residenti, N , e turisti, M) si ha:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \\ \frac{dM}{dt} = RM \end{cases},$$

un sottocaso del modello a competizione interspecifica che si realizza quando:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad k \gg N \geq 0, \quad K \gg M \geq 0.$$

Naturalmente essendo $r =$ *potenziale biologico della popolazione residente*; $k =$ *capacità di carico o popolazione sostenibile*; $\alpha =$ *coefficiente d'interferenza dei turisti verso i residenti*; $R =$ *potenziale biologico della popolazione turistica*; $K =$ *capacità di carico o popolazione turistica sostenibile*; $\beta =$ *coefficiente d'interferenza dei residenti verso i turisti*.