

# Modello preda-predatore di Lotka-Volterra

(adattato da: [http://it.wikipedia.org/wiki/Equazioni\\_di\\_Lotka-Volterra](http://it.wikipedia.org/wiki/Equazioni_di_Lotka-Volterra))

Le equazioni di Lotka-Volterra, note anche come equazioni preda-predatore, sono un [sistema di equazioni differenziali](#) non lineari del primo ordine. Tali equazioni forniscono un [modello matematico](#) in grado di descrivere la dinamica di un [ecosistema](#) nel quale due specie interagiscono (interazione interspecifica): una delle due come predatore, l'altra come la sua preda. Questo modello è stato proposto indipendentemente da [Alfred J. Lotka](#) nel 1925 e [Vito Volterra](#) nel 1926.

L'idea del modello applicato ai residenti ed ai turisti del centro storico veneziano è di considerare uno scenario nel quale coesistono due specie: i turisti ed i residenti.

Siano  $M(t)$  ed  $N(t)$  rispettivamente il numero di turisti e di residenti presenti al tempo  $t$  nel centro storico. Il *tasso di crescita* della popolazione dei turisti, cioè la [derivata](#)  $M'(t)$ , è determinato dalla frazione di popolazione residente che eroga servizi turistici.

La quantità di servizi per unità di tempo utili ai turisti è proporzionale al numero di incontri tra residenti e turisti, che sarà proporzionale ad entrambe le popolazioni e quindi al loro prodotto  $N(t)M(t)$ . Ci sarà una quantità minima di servizi per unità di tempo,  $m$ , necessaria ad un turista per essere soddisfatto. Quindi, si assume che il tasso di crescita della popolazione dei turisti sia proporzionale, oltre che - ovviamente - alla popolazione già presente  $M(t)$ , anche allo scarto tra i servizi disponibili per ciascuno dei residenti  $N(t)$  ed i servizi necessari al soddisfacimento minimo,  $m$ , ovvero:

$$M'(t) = a(N(t) - m)M(t) = (CN(t) - D)M(t) \quad \text{con } C > 0 \text{ e } D > 0$$

dove si è posto  $C = a$  e  $D = am$ .

Ora si consideri il tasso di crescita  $N'(t)$  della popolazione dei residenti e si assuma che questi dispongano di risorse sufficienti a far aumentare la loro popolazione in assenza di turisti. D'altra parte alcuni residenti, estranei al turismo, vengono espulsi dal territorio e si può assumere che il loro numero per unità di tempo sia ancora proporzionale a  $N(t)M(t)$ . Segue che il tasso di crescita dei residenti può essere scritto nella forma:

$$N'(t) = AN(t) - BN(t)M(t) \quad \text{con } A > 0 \text{ e } B > 0.$$

Il primo addendo indica il numero di residenti nati o importati per unità di tempo al tempo  $t$  e il secondo il numero di individui espulsi dal territorio o morti.

Le equazioni ottenute, che costituiscono il *modello di Volterra-Lotka*, si possono scrivere nella forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (A - By)x \\ \frac{dy}{dt} = (Cx - D)y \end{cases}$$

e, ponendo  $A = r$ ,  $B = r\alpha/k$ ;  $C = -R\beta/K$ ;  $D = -R$ , nella forma:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \alpha \frac{M}{k} \right) \\ \frac{dM}{dt} = RM \left( 1 - \beta \frac{N}{K} \right) \end{cases}$$

dove:

- $r$  = potenziale biologico della popolazione residente;
- $k$  = capacità di carico o popolazione sostenibile;
- $\alpha$  = *coefficiente d'interferenza dei turisti verso i residenti*
- $R$  = *potenziale biologico della popolazione turistica*;
- $K$  = *capacità di carico o popolazione turistica sostenibile*;
- $\beta$  = *coefficiente d'interferenza dei residenti verso i turisti*.

In quest'ultima forma il modello di Volterra-Lotka è un sottocaso del [modello a competizione interspecifica](#) che si realizza quando  $k \gg N \geq 0$  e  $K \gg M \geq 0$ .