CAPITOLO 5
SVILUPPO DI MODELLI MATEMATICI PER L'AMBIENTE

1. SVILUPPO DI MODELLI MATEMATICI AMBIENTALI

Nel settore ambientale, i modelli matematici possono essere chiamati a svolgere funzioni **interpretative** o **decisionali** dovendo nel primo caso *mimare* il comportamento di sistemi e nel secondo *supportare* chi deve prendere decisioni per pianificare o per gestire il territorio. La gestione e la pianificazione richiedono strumenti differenti perché la pianificazione generalmente si esercita su scale temporali diverse (più lunghe) della gestione, spesso disponendo anche di informazioni meno precise. A loro volta, quindi, i modelli decisionali si presentano con diverse sfaccettature e contribuiscono a rendere ancora più articolato il panorama dei *tools* matematici per l'ambiente.

Un modello matematico può svolgere solo compiti limitati e va scoraggiata l'idea di cercarne uno capace di rispondere a tutte le esigenze. Al contrario, in simmetria con le *banche di dati*, conviene pensare a ***banche di modelli* (*modelbase*)** come archivi con più modelli per soddisfare diverse necessità, rimanendo valida la regola secondo cui: *meglio un modello piuttosto che nessuno*.

In questo contesto i modelli acquistano un notevole numero di attributi difficilmente riscontrabili in altri strumenti, tra cui in particolare si sottolinea che sono:

1. **coerenti**: assolutamente logici;
2. **trasparenti**: chiunque può verificare un risultato;
3. **selettivi**: i risultati dipendono solo dai processi contenuti nel modello e non vengono distorti da apparecchiature intermedie;
4. **elastici**: si adattano a situazioni anche notevolmente diverse da quelle che li hanno ispirati;
5. **duttili**: si possono modificare facilmente;
6. **veloci e graduabili**: hanno tempi di esecuzione diversi (generalmente minori e comunque modificabili) da quelli dei fenomeni che mimano;
7. **chiari**: forniscono restituzioni grafiche fino a sei dimensioni (3-D spaziali, colore, movimento, finestre);
8. **trasportabili**: da calcolatore a calcolatore (dati, programmi e risultati);
9. **distribuibili**: ad operatori anche inesperti di calcolatori e di matematica;
10. **conservativi**: possono analizzare eventi catastrofici senza produrre danni;
11. **economici** in fase di realizzazione e di gestione: costano meno delle osservazioni dirette e dei modelli fisici.

Nonostante queste indubbie qualità i modelli sembrano aver promesso più di quanto non abbiano mantenuto, ma ciò è dovuto soprattutto agli scarsi investimenti fatti su di essi. Infatti oggi mancano gli uomini per costruirli, per svilupparli e per effettuarne le manutenzioni e mancano anche i *database* per determinarne i parametri e per valutarne le prestazioni.

Per rendersi conto delle carenze tecniche (oltre a quelle finanziarie) legate al settore è bene ricordare che **gli attributi elencati sono disponibili, ma vanno conquistati seguendo itinerari metodologici** ormai disegnati con chiarezza. Infatti, la costruzione, il trasferimento o la modifica di un modello si realizza attraverso una scaletta operativa che comprende i seguenti passi:

1. *percezione e concettualizzazione del fenomeno,*

2. *descrizione e formulazione del problema,*
3. *individuazione dei parametri*
4. *validazione del modello.*

Per quanto riguarda la fase di percezione e concettualizzazione, si può brevemente dire che si tratta di un passo molto soggettivo e critico per i risultati e che è solo parzialmente tecnico. Si tratta di un punto che il modellista dovrebbe sviluppare in collaborazione stretta con l'utilizzatore, soprattutto per evitare di essere indotto a prendere vie pregiudiziali sulla spinta di schemi di cui conosce le soluzioni. Una causa d'inefficacia dei modelli è sicuramente da ricercare anche nell'incomprensione fra modellista ed utente, che però non va ascritta sempre al primo, visto che spesso il secondo evita indicazioni precise. D'altra parte è noto che due persone poste di fronte alla medesima situazione l'affrontano in modi anche notevolmente differenti certificando l'ampiezza dei punti di vista e la loro soggettività.

La fase di descrizione e formulazione del problema consiste nell'isolare un set di ***regole*** che inquadrano le conoscenze attuali e le predispongono per una formalizzazione matematica. Il risultato è, generalmente, costituito da un numero di relazioni fra grandezze, alcune delle quali sono espresse sotto forma di equazioni integro-differenziali per le quali si devono sviluppare soluzioni: esatte, approssimate o numeriche. Naturalmente, neppure questa fase ha risultati unici ed è proprio la molteplicità delle formalizzazioni che consiglia di predisporre archivi con più modelli.

L'individuazione dei parametri *(parametrizzazione)* è ancora una fase delicata che contiene una quota di soggettività. Infatti si tratta di determinare dei valori numerici da attribuire ai parametri delle relazioni in modo da realizzare la ***stima*** che ***meglio*** approssima la conoscenza attuale del fenomeno (quella rappresentata dal database). Il concetto di *miglior stima* è chiaro ma i modi per attuarla sono molti (ad esempio, minimi quadrati, massima verosimiglianza, reti neuronali, ecc.) ed ognuno ha risultati diversi.

La **validazione** del modello si esegue per collaudare le capacità interpretative e/o previsionali del prodotto prima che possa essere usato per scopi pratici. Le verifiche di questa fase vanno condotte considerando situazioni normali ed anomale delle quali esistano dati non utilizzati per l'individuazione dei parametri.

Alla fine di questo ciclo si dispone di un *database* e di un *modelbase* che saranno stati trasferiti su un calcolatore per semplificare le operazioni e per risolvere i problemi numerici: **ogni *modelbase* richiede un *database* e viceversa perché l'uno senza l'altro servono a ben poco.** Inoltre si deve tenere presente che lo sviluppo di un *database* e del collegato *modelbase* è un'operazione a lungo termine perché alla fase di realizzazione segue, generalmente, una di affinamento. L'affinamento è un processo ciclico che si ottiene completando il *database* attraverso le indicazioni del *modelbase* e quindi usando i nuovi dati per migliorare il *modelbase*. Un tale processo finisce solo quando i risultati soddisfano completamente o si stabilisce che per quella via gli obiettivi non possono essere raggiunti.

2. I MODELLI MATEMATICI PER L'AMBIENTE NELLA SCUOLA

La scienza del secolo appena trascorso si è caratterizzata per il suo contraddire la possibilità di riduzionismo ipotizzata invece durante i secoli precedenti, per esempio da Simon De Laplace (e dai suoi seguaci) nel suo trattato sulla teoria della probabilità (Theorie Analitique des Probabilites):

«Tutti gli eventi, anche quelli che per loro piccolezza sembrano non dipendere dalle grandi leggi della natura, ne sono una conseguenza altrettanto necessaria delle rivoluzioni del Sole. Per l'ignoranza dei legami che li uniscono al sistema intero dell'Universo, li si è

fatti dipendere dalle cause finali e dal caso secondo che si producevano e si susseguivano con regolarità e senza ordine apparente; ma queste cause immaginarie sono state successivamente allontanante assieme ai confini delle nostre conoscenze, e scompaiono completamente di fronte alla sana filosofia che non vede in esse altro che l'espressione della nostra ignoranza delle cause vere».

Tutte queste affermazioni sono in realtà state contraddette dalle numerose scoperte scientifiche del Novecento: al riguardo basti per esempio pensare alla non risolubilità del problema dei "tre corpi" (il quale afferma che è impossibile conoscere esattamente le triettorie di tre o più corpi celesti interagenti gravitazionalmente), oppure all'introduzione della meccanica quantistica, oppure ancora alla sempre maggiore complessità dei sistemi regolati da leggi apparentemente semplici, oppure alla teoria dei sistemi. In base alle attuali conoscenze, si può tranquillamente affermare quindi che non esiste una scienza matematica della natura, ma piuttosto una collezione assai articolata di *metodi* (ovvero di *simboli e regole formali per usarli*) e *teorie* (*significati da associare ai simboli*) che non si può ricondurre a qualcosa di unitario, i quali formano un *linguaggio* ricco di categorie concettuali (logico-formali) utile per descrivere i sistemi naturali.

Le operazioni che si compiono per costruire un modello si ripetono più volte nella nostra giornata: se ne propone ora un semplice esempio a livello didattico quale è il modello di *«oggetto che pesa in proporzione al suo volume»*. Tale esempio può servire per introdurre ad una classe il concetto di modello matematico, da esso si può poi eventualmente prendere spunto per proseguire.

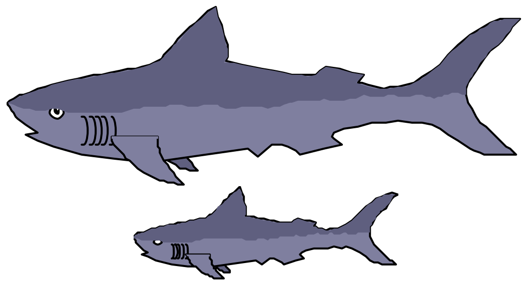


Figura 1. Esempio di modello matematico per la didattica: conoscendo il peso di un pesce piccolo, ricavare quello del pesce di dimensioni più grandi.

Lo schema del modello è il seguente. Si supponga di essere in qualche modo a conoscenza del fatto che ogni pesce ha peso proporzionale al suo volume e ci si ponga il seguente quesito: *«come valutare ad occhio il peso P di un pesce lungo 40cm sapendo il peso p di un altro lungo 20 cm?»* Per risolvere il quesito (e costruire quindi un modello di risoluzione) si può ipotizzare di fare la seguente ipotesi di lavoro: alla dilatazione della lunghezza corrisponda analoga variazione delle altre dimensioni. Questa ipotesi consente di compilare la seguente Tabella II:

Tabella II. Esempio didattico per la costruzione di un modello matematico ambientale.

	Pesce piccolo	**Pesce grande**
Lunghezza	***L=20cm***	***40cm = 2 L = 2×20***
Spessore	***S***	***2 S***
Peso	***P***	***P=peso= ?***
Altezza	***H***	***2 H***
Ipotesi: peso ∝ volume	***V=L·S·H***	***V=2×2×2×(S×H×L)=8 (S×H×L) =8v ⇒ P=8p***

Questo è un semplice ma al contempo chiaro esempio di come si possa pensare di costruire un modello matematico in campo ambientale; è ovviamente chiaro che una sua verifica sperimentale potrebbe portare a scoprirne errori, infatti non è stato tenuto in considerazione alcun fattore di tipo strutturale (ad esempio variazioni corporee, da individuo ad individuo o da specie a specie ad un'altra). Gli insegnamenti che si possono trarre a riguardo della costruzione di modelli sono i seguenti:

i) è necessario avere almeno un'idea della grandezze caratteristiche del problema che si vuole affrontare,

ii) servono ipotesi per stabilire relazioni formali (equazioni) tra queste grandezze,

iii) nel contempo occorre fare semplificazioni che consentano di calcolare i valori cercati.

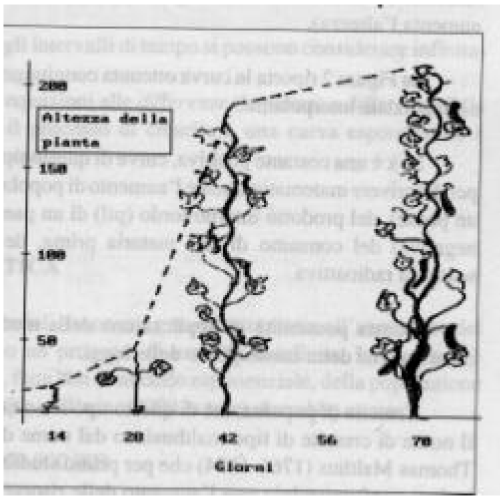


Figura 2. Il fagiolo di Nepero. Si può notare come esso cresca molto rapidamente e tale crescita è ben riprodotta da una curva esponenziale $N(t) = N_0 e^{kt}$

Da queste considerazioni emerge chiaramente come un modello (pur semplice dal punto di vista matematico) sia una miscela complessa di ipotesi, pregiudizio, manipolazione matematica non riconducibile a schemi seguibili pedissequamente. Di solito si ritiene che lo scopo principale di un modello sia fare previsioni sull'andamento di un determinato fenomeno, è però anche importante tutto ciò che si impara durante la fase di costruzione di un modello, ossia l'intreccio di modellizzazione ed esperienza che contribuisce a formare il nostro patrimonio di conoscenza.

Si può allora tentare di definire (Israel, 1988) un modello matematico come una ***rappresentazione formale di idee o conoscenze relative ad un fenomeno.*** È opportuno precisare due aspetti salienti di questa definizione:

- un modello matematico è una *rappresentazione formale*, cioè non discorsiva di un fenomeno,
- *non esiste una via diretta dalla realtà alla matematica* perché il processo si sviluppa passando attraverso *idee e conoscenze* (ossia il fenomeno non determina automaticamente la sua rappresentazione matematica, ma sono le idee e le conoscenze ad essere oggetto del modello).

Le funzionalità di un modello matematico possono così essere sintetizzate:

i) definire un problema
ii) organizzarne lo studio
iii) comprendere i dati che si sono raccolti
iv) fare previsioni.

Per completezza, si accenna nel seguito ad alcuni semplici modelli matematici molto comuni nello studio di questioni ambientali (e non solo). Il primo riguarda i problemi di crescita, ad esempio quella di tipo esponenziale.

Il fagiolo di Nepero. Uno dei problemi che capita più frequentemente di dovere affrontare nella modellistica matematica ambientale è quello di descrivere i processi di crescita. Proviamo a pensare ad un nuovo prodotto biotecnologico: un particolare tipo di fagiolo che, nelle intenzioni dei progettisti, dovrebbe crescere molto in fretta. Si vuole ora andare a verificare praticamente se le operazioni di ingegneria genetica messe in atto hanno dato l'esito desiderato. Vengono allora seminati diversi fagioli e ad intervalli regolari di 14 giorni ogni pianta viene fotografata. Ci si chiede se esista una curva continua che consenta di approssimare una crescita come quella illustrata in Figura 2. La risposta, positiva, è data dalla seguente funzione che rappresenta un *modello di crescita esponenziale*

$$N(t) = N_0 e^{kt} \qquad (1)$$

ove $N(t)$=altezza al tempo t; N_0=altezza iniziale, k= costante di velocità di crescita.

La (1) esprime il fatto che, in assenza di vincoli esterni (quali ad esempio risorse alimentari limitate, malattie, ecc.) la crescita di una popolazione è illimitata, con velocità proporzionale alla popolazione stessa (esplosività). Dal modello (1) si deduce facilmente che:

- se $k>0$: la (1) può leggersi come un modello per descrivere fenomeni di crescita di popolazioni (per esempio di una specie animale),
- se $k<0$: la (1) può leggersi invece come un modello per descrivere fenomeni di consumo di una materia prima, di decadimento di una sostanza radioattiva, ecc.

La possibilità di applicare la medesima legge in campi diversi si chiama *isomorfismo delle leggi*. Non è difficile verificare che un modello funzionale del tipo (1) soddisfa alla ben nota equazione della crescita esponenziale, vale a dire:

$$\frac{dN}{dt}(=v_N) = k\ N \qquad (2)$$

ove si è indicato (non solo nella (2), ma analogamente anche nelle altre formule seguenti del presente paragrafo) con v_N la derivata temporale di N rispetto al tempo, ossia la velocità di crescita di N. L'esperienza quotidiana ci insegna però che nella pratica le assunzioni (assenza o trascurabilità dei vincoli esterni) del modello (1) non sono rispettate (basti per esempio pensare che una certa specie animale non può disporre di risorse alimentari illimitate, oltretutto esistono malattie o parassiti o altri predatori) Nella realtà quindi è necessario migliorare il modello (1) ovvero (2), e ciò si può fare ricorrendo ad un altro modello (che poi altro non è che un ampliamento del primo) detto di *crescita logistica*.

La crescita logistica. Detto N_{max} = il numero massimo di individui di una certa popolazione che possono vivere in un dato ambiente, questo nuovo modello postula che la velocità di crescita di tale popolazione sia proporzionale (secondo un fattore α) alla popolazione attuale ed alla popolazione che manca per arrivare al livello di "saturazione" (N_{max} appunto) ossia:

$$\frac{dN}{dt} = (v_N) = a\ N(N_{max} - N) \qquad (3)$$

Il modello (3) ci dice che una popolazione limitata superiormente cresce meno velocemente di quanto non faccia una non limitata come quella del modello (2): la limitazione della crescita si presenta quanto più ci si approssima al livello di "saturazione" in quanto si determina una variazione del tasso di crescita annuo in conseguenza dell'eccesso di popolazione che degrada la qualità della vita (la necessità di limitare la crescita della popolazione è oggi percepita in modo molto più forte di una volta in quanto ogni organismo per vivere richiede energia e risorse materiali dal suo ambiente); è possibile verificare poi (ma esula dagli obiettivi di questo corso) che la legge di crescita (3) è deterministica nel continuo e caotica nel discreto (Turcotte D.L.). Questo fatto apre un capitolo che è proprio delle scienze ambientali ed è tra l'altro una delle maggiori scoperte scientifiche recenti.

Un semplice modo per iniziare ad introdurre a degli allievi questi modello può essere tramite il seguente indovinello: si supponga di avere un laghetto nel quale cresce una ninfea che ogni giorno raddoppia le proprie dimensioni. Se potesse svilupparsi liberamente, la ninfea coprirebbe completamente il laghetto in trenta giorni, soffocando tutte le altre forme di vita presenti nel laghetto. Se, per salvare il laghetto, si decide di tagliare la ninfea allorché è arrivata a coprire metà dello specchio d'acqua, in quale giorno bisognerà farlo? La risposta è che si deve intervenire al *29°* giorno e si avrebbe quindi un solo giorno di tempo per salvare il laghetto. È utile esprimere la crescita esponenziale in termini di tempo di raddoppio.[1] Nel caso della ninfea il tempo di raddoppiamento è pari ad un giorno. Volendo esprimere il tutto in termini un po' più formali, si può procedere nel modo seguente. Si indichi con N il numero di individui presenti sulla terra la tempo t $((N=N(t))$ e si supponga che k sia il tasso di crescita (=numero percentuale di individui in aumento ogni anno), assunto costante. In questo caso il fenomeno è retto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{dN}{dt} = v_N = k\,N$$ la cui soluzione è data da $$N(t) = N_0\, e^{kt} = crescita\ esponenzide.$$[2]

Un altro esempio, questa volta lievemente più complicato, molto utilizzato nell'ambito delle scienze ambientali ed in ecologia è il modello Preda-Predatore di Lotka-Volterra qui brevemente accennato. Consideriamo un biosistema composto da due sole popolazioni, X_1 ed X_2, e supponiamo che quest'ultima X_2 sia costituita da predatori che si alimentano della popolazione preda X_1 (ad esempio X_2 può essere pensata come una popolazione di carnivori ed X_1 una popolazione di erbivori, oppure X_2 può essere una popolazione di erbivori e X_1 una popolazione di vegetali). Supponiamo d'altronde che I'interdipendenza tra le due popolazioni sia tale da soddisfare le seguenti condizioni:

i) in assenza della popolazione X_2, la popolazione X_1 crescerebbe esponenzialmente con tasso $a_1 > 0$, cioè:

$$\frac{dX_1}{dt}(=V_1) = a_1\, \boldsymbol{X_1}$$

ii) in assenza della popolazione X_1, la popolazione X_2 si estinguerebbe esponenzialmente con tasso $-a_2 < 0$, cioè:

$$\frac{dX_2}{dt}(=V_2) = -a_2\, \boldsymbol{X_2}\cdot$$

Stiamo ammettendo in definitiva che la dieta della popolazione X_2 sia costituita dalla sola popolazione X_1, e pertanto che, in assenza di questa, X_2 si estingua per fame: supporre che questa estinzione avvenga in modo esponenziale e non, come sarebbe forse più naturale, che essa avvenga in modo discontinuo e "catastrofico" è una questione di convenienza matematica.

---

[1] Il tempo di raddoppio è il tempo occorrente perché la grandezza in esame raddoppi il proprio valore (incremento del *100%*).

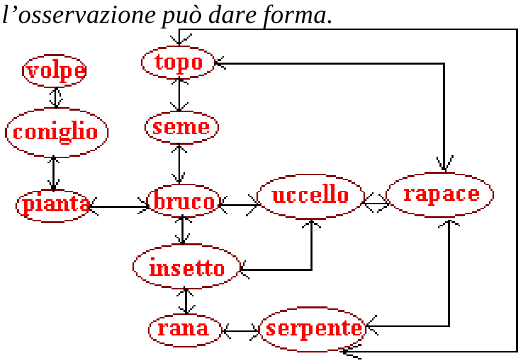
[2] Da questa espressione di può facilmente calcolare il tempo di raddoppio *Dt* infatti basta risolvere rispetto a *Dt* l'equazione $2 = e^{k\Delta t}$ ottenendo *Dt=ln(2)/k* , ove *k* denota il tasso di crescita percentuale.

iii) la presenza della popolazione X_2 provoca una diminuzione del tasso di crescita della popolazione X_1 in misura proporzionale alla grandezza della prima, e più precisamente supponiamo che detto tasso di crescita passi da a_1 ad (a_1- $a_{12}X_2$**)**, con $a_{12}>0$,di modo che sia:

$$\frac{dX_1}{dt} = (V_1) = \left(a_1 - a_{12}\boldsymbol{X}_2\right)\boldsymbol{X}_1 \cdot$$

Su questa equazione, e più precisamente sul significato del coefficiente a_{12}, è senz'altro il caso di spendere qualche parola. In prima approssimazione il numero di incontri tra prede e predatori può essere supposto proporzionale sia a X_1 sia a X_2**,** e noi supporremo allora che esso sia pari a aX_1X_2, dove $a>0$ è la costante di proporzionalità che appare così come una misura della maggiore o minore frequenza con cui avvengono effettivamente gli incontri (e pertanto dipende tra l'altro dall'habitat). Di questi incontri, una frazione si risolve nell'eliminazione della preda e, sempre in prima approssimazione, possiamo supporre che il numero degli incontri fatali sia proporzionale al numero totale degli incontri, scrivendo allora detta frazione nella forma baX_1X_2**,** dove $b>0$ misura, a seconda del punto di vista, I'efficienza del predatore o la capacità di proteggersi della preda. Infine poniamo $a_{12}= ba$.

Figura 3. Un esempio di rete alimentare. Più si osserva con attenzione, più appaiono nuovi soggetti e nuove relazioni. Dalla semplice catena alimentare si passa ad una fitta trama di inter-relazioni. Il relativo modello diventa sempre più complesso e difficile da gestire. Ad ogni relazione corrispondono infatti una funzione e dei parametri incogniti ai quali solo l'osservazione può dare forma.



iv) la presenza della popolazione X_1 provoca un aumento del tasso di crescita della popolazione X_2 in misura proporzionale alla grandezza della prima, e più precisamente supponiamo che detto tasso di crescita passi da $-a_2$ ad $(-a_2 + a_{21} X_1)$ di modo che è:

$$\frac{dX_2}{dt} = (V_2) = \left(-a_2 + a_{21}\boldsymbol{X}_1\right)\boldsymbol{X}_2 \cdot$$

Il coefficiente a_{21} misura il vantaggio della predazione per il predatore, e scrivendo $a_{21}=ga_{12}$, possiamo interpretare g come una misura della quantità di preda pro-capite che serve ai predatori per riprodursi. Relativamente al biosistema coniglio/lattuga, ad esempio, possiamo dire che g misura la quantità di lattuga necessaria alla nascita di un nuovo coniglio, ovvero la voracità dei conigli genitori; osserviamo a questo proposito che, tra l'altro d'accordo con l'ipotesi di omogeneità, trascuriamo il tempo di assimilazione delle prede da parte della popolazione predatrice, non considerando quindi ad esempio il tempo di sviluppo pre-riproduttivo ed evitando così la modellizzazione tramite strumenti matematici diversi dalle equazioni differenziali ordinarie.

Riassumendo, I'interazione tra il predatore X_2 e la sua preda X_1, è governata dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} V_1 = (a_1 - a_{12}X_2)\,X_1 \\ V_2 = (-a_2 + ?a_{12}X_1)\,X_2 \end{cases}$$

(dove a_1, a_2, a_{12}) sono costanti positive; questo sistema è detto sistema di equazioni di Lotka-Volterra.

Si può studiare questo sistema di equazioni differenziali con l'obiettivo di tracciare il relativo quadro delle fasi, il quale dirà come evolve lo stato del biosistema costituito dalle popolazioni X_1 *e* X_2 a partire da un qualunque stato iniziale (X_{10}, X_{20}) biologicamente significativo (e cioè tale che $X_{10} \geq 0$ *e* $X_{20} \geq 0$ poiché queste sono misure della grandezza delle popolazioni X_1 e X_2 nell'istante in cui si comincia ad osservare il biosistema). A riguardo del modello appena presentato un interessante approfondimento inerente un gioco educativo lo si può trovare al sito della Mendocino Middle & High School in California, dove è disponibile il gioco "The Wildlife Survival Card Game".

3. Conclusioni sui Modelli Matematici

Anche se esistono teorie che ambiscono a descrivere l'intero sistema planetario come un tutt'uno, la descrizione matematica completa di questa unità è un progetto che va oltre qualsiasi pur rosea possibilità pratica e teorica di ogni modellista. Lasciando queste argomentazioni agli addetti ai lavori (per esempio qualche filosofo), è invece importante constatare che la realtà così come ci appare è suddivisa in differenti scale temporali e spaziali, caratteristiche dei diversi fenomeni, le quali sono interdipendenti, ma in genere debolmente connesse e tali che i fenomeni ad una determinata scala possono essere più semplicemente descritti ignorando tutte le altre. Alla grande varietà di forme e di processi corrisponde un gran numero di modi di descrivere matematicamente questi oggetti, ed una differente importanza dei rispettivi modelli (a volte teorica, a volte pratica, a volte entrambe, a volte educativa).

Non bisogna quindi riporre nei modelli matematici una fiducia assoluta e dogmatica, né però guardare ad essi con sospetto. Al contrario, essi connettono in modo inequivocabile (anche ignorando certi fatti o fatti certi) cause con effetti, dato che il loro funzionamento (come il loro contenuto) può essere verificabile in qualunque momento da chiunque. Inoltre molto spesso la costruzione di un modello matematico è un fatto molto più affidabile che non ragionare per analogia (vale a dire costruire modelli su scala ridotta che lavorano in modo appunto analogico), anche per il fatto che consente di avere una linea guida per costose esperienze per le quali comunque sarebbe necessario disporre di qualche modello interpretativo.

I modelli matematici sono uno strumento tecnologico e culturale assai importante che in ambito educativo e scolastico meriterebbe certamente maggiore attenzione e considerazione.

Bibliografia

- Provincia di Treviso (Assessorato P.I.) e Cattedra di Pedagogia dell'Università di Venezia, 1991. *"Un punto per l'Ambiente, Itinerari Educativi"*, reazione metodologica a cura di D. Corcione e F. Tessaro.
- Israel G., 1988. *I modelli Matematici*, Editori Riuniti.
- Turcotte Donald L *Fractal and chaos in Geology and Geophysics*, Cambridge University Press.