

CAPITOLO V – I SIMULATORI

Come già detto più volte, il metodo scientifico che caratterizza le scienze della natura si basa su una «conoscenza sperimentale» resa oggettiva dalle «verifiche». Queste ultime devono essere ottenute con simulatori necessari per controllare il proprio sapere e per trasmetterlo a terzi. Nelle scienze classiche i simulatori sono modelli fisici (generalmente di laboratorio), mentre nelle scienze ambientali sono necessariamente e sempre modelli formali (algoritmi). Gli algoritmi, come gli apparati di laboratorio, sono i più svariati e dipendono dalla fantasia dei ricercatori. Per questo non è possibile catalogarli ed è già difficile classificarli. Nel seguito si tenteranno di individuare le categorie per i modelli più in uso, tenendo presente la differenza fra modelli concettuali (modelli qualitativi, che inquadrano i fenomeni) e simulatori (modelli operativi, che permettono di riprodurre gli eventi).

In altre parole la scienza, nella sua qualità di conoscenza verificabile, non può prescindere dalle verifiche che, per altro, sono possibili solo quando l'oggetto di studio risulti riproducibile *ad libitum*. Se l'oggetto di studio è artificiale i problemi da affrontare non riguardano la scienza, ma appartengono alle tecnologie, per le quali la riproducibilità è intrinseca all'oggetto stesso (oggettivo in quanto artificiale e verificabile tramite collaudo). Se invece l'oggetto di studio è naturale, si producono opinioni fino a quando non si realizzi uno strumento che permetta di simulare l'oggetto, in modo da poterlo riprodurre.

Questi concetti sono stati ampiamente analizzati e discussi nei capitoli precedenti nei quali si sono descritte anche le due alternative scientifiche dei simulatori fisici e dei simulatori formali (v. fig. 5.1). Il termine “modello” viene talvolta usato con il significato di “simulatore”, talaltra con quello di “descrittore”. Entrambi questi significati

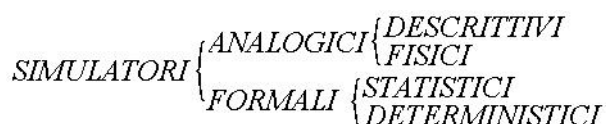


Fig.5.1. Classificazione dei modelli di simulazione.

intervengono nel pensiero scientifico: il primo per intendere uno strumento di verifica ed il secondo uno strumento tassonomico. Il duplice significato in genere non crea confusione, ma, se del caso, se ne esplicherà la distinzione. Pertanto, alla allocuzione «simulare un evento ambientale» daremo il significato di «fornire uno o più algoritmi che collegano le coordinate dello spazio delle fasi (gli indicatori dell'evento) con lo spazio geometrico e con il tempo, in modo da calcolare la traiettoria che descrive l'evento punto per punto ed istante per istante». Gli algoritmi possono essere formulati matematicamente tramite equazioni (implicite o esplicite) oppure essere ottenuti con accorgimenti automatici (concettuali, geometrici, numerici, ecc.).

5.1. – Simulatori analogici

Ragionare per analogie è prassi comune quando si trasmettono opinioni. Al riguardo si pensi, ad esempio, alle *iperboli*⁽¹⁾, alle *parabole*⁽²⁾, alle *metafore*⁽³⁾, ai *paradossi*⁽⁴⁾, ecc.. Ma anche

⁽¹⁾ nel senso di figura retorica con la quale si esagera (*è un secolo che non ci vediamo*) o si riduce (*non ho un attimo di tempo*) volontariamente un concetto, allo scopo di renderlo più efficace.

⁽²⁾ nel senso di narrazione che ha il fine di impartire un insegnamento di carattere morale o religioso (v. Nuovo Testamento).

⁽³⁾ figura retorica per cui si esprime per similitudine una cosa diversa da quella enunciata.

⁽⁴⁾ affermazione incredibile, completamente contraria all'opinione comune. In fisica è un esperimento o fenomeno che appare contraddittorio con le leggi note. Si conoscono moltissimi paradossi e fra i più noti: *Paradosso del postino* - Devo prendere la posta per tutti coloro che non se la prendano da soli e si presume che non la prenda per coloro che la prendano da soli; ma la mia posta? Se la prendo allora si presume che non la prenda e, d'altro canto, se non la prendo si presume che io la prenda. *Paradosso del mentitore* - Questo enunciato è falso. Se è vero dovrebbe essere falso e se fosse falso dovrebbe essere vero. *Paradosso dei cataloghi* - In una biblioteca possono esistere cataloghi di libri che contengono anche se stessi (tipo A) e cataloghi che non contengono se stessi (tipo B). Consideriamo il catalogo C di tutti i cataloghi di tipo B. Se C è di tipo B allora dovrebbe riportare anche se stesso, ma in tal caso sarebbe di tipo A. Se è invece di tipo A, contiene se stesso, ma allora non è più il catalogo di tutti e soli i cataloghi

la scienza ha usato le analogie per visualizzare fenomeni lontani dalla loro percezione diretta, o fenomeni sconosciuti. Si pensi, ad esempio, all'*etere* che era un fluido mai visto perché inesistente, ma efficace per sviluppare analogie fra onde elettromagnetiche ed onde elastiche (sonore, subsoniche e supersoniche). L'analogia è stata talmente utile da permettere una quasi completa comprensione dell'elettromagnetismo prima di capire che l'*etere* non esisteva e che comunque era inutile alla fisica. Altrettanto si deve dire di un famoso modello nucleare dovuto a Fermi (il modello a goccia del nucleo) che gli permise sofisticati schemi di reazioni nucleari assimilando il comportamento dei nuclei atomici a quello delle gocce dei liquidi.

Il termine «modelli analogici» richiede quindi qualche precisazione per evitare equivoci. Nel presente contesto il termine comprende tutti i modelli che non ricadono nella tipologia di quelli «formali», dei quali però costituiscono sempre il presupposto. Così, i modelli analogici non portano necessariamente a formule ma piuttosto a sviluppare considerazioni su un evento pensando ad un altro che gli assomiglia. D'altra parte, tutti i modelli formali sono costruiti su un modello analogico di base. Per questo i ragionamenti per analogia vanno considerati con tutto il rispetto che meritano, avendo però cura di non sopravvalutarli.

Il concetto di analogia, inoltre, porta a quello di «similitudine», che rimanda indietro di una cinquantina d'anni o poco più, ovvero a quando il calcolo elettronico non esisteva ancora o era agli albori. Allora per simulare i comportamenti reali si usavano sistemi in scala a comportamento «simile». I criteri che permettono di assimilare i comportamenti di due sistemi devono considerare aspetti geometrici, fisici e bio-chimici. I primi riguardano le forme e si riferiscono alla necessità di confrontare spazi con caratteristiche topologiche analoghe. Le similitudini biologiche e chimiche riguardano le leggi costitutive (leggi di equilibrio e strutturali degli individui e/o delle popolazioni) e quelle evolutive (dinamiche individuali e/o cinetiche delle popolazioni) delle componenti biologiche e chimiche. Le similitudini fisiche considerano le leggi della meccanica e della termodinamica che regolano i comportamenti dei sistemi nel loro insieme o in loro parti.

La completezza delle leggi fisiche ha permesso di teorizzare in modo semplice e rigoroso quest'ultimo aspetto delle similitudini al quale si devono molte delle grandi realizzazioni ingegneristiche del ventesimo secolo (scafi di navi, fusoliere di aerei, dighe, ecc.) basate su «modelli fisici» studiati in vasche idrauliche, gallerie del vento, ecc.

L'analisi delle similitudini fisiche si basa sulla possibilità di formulare le leggi fisiche con adeguati prodotti adimensionali in sostituzione delle variabili e dei parametri dimensionali. Una tale

di tipo B. In entrambi i casi si cade in contraddizione. *Paradosso di Achille e della tartaruga* (paradosso di Zenone) - Achille sfida una tartaruga in una gara di corsa dandole il vantaggio x . Quando Achille sarà arrivato in x la tartaruga avrà fatto un tratto pur piccolo y e sarà ancora in vantaggio; quando Achille sarà nel punto $x + y$, la tartaruga avrà fatto un tratto pur piccolo z e sarà ancora in vantaggio. Achille non potrà mai superare la tartaruga.

Prendendo in esame l'architettura di un elaboratore nella quale non esiste distinzione fra semantica e sintattica (tutto ciò che è sintatticamente scorretto è incomprensibile) e non esistono i concetti di continuità e di infinito, Albanesi (1984) ha ricondotto i paradossi a due tipi fondamentali. Nei paradossi di primo tipo la tendenza a dare un senso a tutto ciò che è sintatticamente corretto (distorsione sintattica) e quella di considerare sintatticamente corretto tutto ciò che è sensato (distorsione semantica) sono alla base dei più comuni paradossi. Per risolvere i vari paradossi occorre riconoscere gli errori sintattici o semantici alla base di essi. Prendere la posta per sé è diverso che prenderla per altri, per cui è corretto usare i termini *selfprendere* e *prendere*; "prendere la posta per sé" non ha significato; analogamente un catalogo non contiene se stesso, mentre un *selfcatalogo* sì e l'espressione "catalogo di libri che contiene se stesso" non ha più senso perché catalogo e *selfcatalogo* sono concetti mutuamente esclusivi. L'enunciato del mentitore è equivalente all'enunciato "questo enunciato è alto"; entrambi sono privi di significato; nel caso del mentitore il termine falso non è usabile poiché la falsità di un enunciato deve essere posteriore alla sua definizione. Come si vede un paradosso di primo tipo nasce dalla confusione tipica del linguaggio naturale fra semantica e sintassi. Un paradosso di secondo tipo (come quello di Zenone) si risolve negando la continuità dello spazio e del tempo (introducendo i concetti di quanti spaziali e temporali, cronone e odone, che sfuggono ai nostri sensi), trasformando l'esempio nel seguente: un orologio segna le due, la lancetta delle ore (che è più lenta, la tartaruga) ha un certo vantaggio su quella dei minuti (che è più veloce, Achille). Il sorpasso è reso possibile dal fatto che il movimento delle lancette è discreto (a scatti); ogni minuto entrambe avanzano, la lancetta delle ore di un tratto a , quella dei minuti di un tratto $12a$. Il vantaggio iniziale è di $120a$, all'undicesimo minuto si ha il sorpasso.

operazione può essere condotta seguendo due metodologie, diverse fra loro, ma in qualche modo complementari: *analisi ispezionale* ed *analisi dimensionale*.

5.2. – Simulatori formali

Per produrre un qualche tipo di cognizione che *rappresenti le idee e le conoscenze* disponibili si deve dapprima comprendere che la differenza metodologica fra chi si affida alla matematica e chi alle logiche comuni sta solo nel linguaggio utilizzato perché in entrambi i casi si lavora con un modello. E se il modello è incerto perché il fenomeno è complesso o poco noto, non è comunque agevole rappresentarlo né con i linguaggi comuni, né con quelli formali (matematici o no). Inoltre, i primi danno più spesso risultati qualitativi, mentre i secondi sono quantitativi per costituzione.

In ogni caso il vantaggio dei linguaggi formali consiste nella certezza delle logiche su cui si basano: asserzione non sempre vera se riferita alle analogie. È inoltre importante tenere sempre presente che la connessione fra realtà e modello è comunque mediata da concettualizzazioni che stanno a monte dello strumento logico utilizzato. E, se si realizza che le schematizzazioni influenzano i modelli, i quali non possono tradurre idee non ricevute, si riconoscono le funzioni proprie dei modelli formali ed i relativi limiti operativi. In particolare, è chiaro che non esiste modello matematico senza idee o conoscenze del fenomeno, cioè senza che qualcuno abbia accumulato esperienza (dati) ed abbia elaborato congetture suscettibili di rappresentazione formale. Inoltre, la rappresentazione formale che potrebbe essere sviluppata prescindendo da strumenti informatici, senza di essi perde efficienza e trasportabilità ed è difficilmente distribuibile. Infatti, l'uso dei calcolatori è ormai molto diffuso e non richiede specializzazioni particolari anche quando si utilizzano procedure sofisticate.



Fig. 5.2. – Classificazione dei simulatori formali.

In fig. 5.2 è riportato un tentativo di schematizzare i modelli formali in uso nei processi di simulazione. Lo schema proposto non ha la pretesa di essere completo, sia per la grande varietà degli strumenti elaborati negli anni più recenti (si pensi ad esempio a tutti i prodotti del settore dell'AI, *Artificial Intelligence*), sia per la difficoltà a classificare

oggetti non ancora sufficientemente “digeriti” (si pensi ad esempio agli *automi cellulari*, alla *matematica fuzzy*, ecc.). I simulatori formali sono strumenti logici che vengono costruiti per rappresentare ed interpretare i comportamenti dei sistemi, utilizzando i formalismi della logica matematica e di logiche assimilate. La loro struttura dipende dai processi che vogliono descrivere e dagli scopi che devono perseguire. A differenza dei modelli analogici, sono dotati di *elasticità*, *duttilità* e *selettività*. Le prime due caratteristiche derivano dalla possibilità di funzionare in campi operativi molto differenziati, mentre la loro selettività è conseguente al fatto che possono tenere conto solo dei processi dei quali sono stati *informati*. Sono inoltre economici, soprattutto in conseguenza delle enormi risorse di calcolo attualmente disponibili a bassi costi. Queste caratteristiche risultano generalmente assenti nei modelli fisici che sono limitati dai componenti costruttivi, reagiscono interferendo con processi propri delle apparecchiature ed hanno elevati costi di realizzazione e di gestione.

A favore dei modelli formali gioca anche la grande varietà di modelli disponibili, tale addirittura da mettere in difficoltà nelle scelte, ma così ricca da mettere a disposizione differenti gerarchie funzionali (impensabili con i modelli fisici e con quelli dei linguaggi descrittivi). Questa opportunità consente, tra l'altro, di graduare i dettagli alle scale degli obiettivi o dei *data base* disponibili.

I modelli concettuali più generali sono quelli che stabiliscono il bilancio delle grandezze che si considerano, siano esse indicatori di risorse economiche a varie scale (individuali, familiari, aziendali, nazionali, mondiali) o di risorse ambientali o di caratteristiche di un qualche tipo.

5.3. – Sistemi esperti⁽⁵⁾

Gli schemi di fig. 5.1 e 5.2 caratterizzano solo grossolanamente la varietà dei modelli usati per l'ambiente perché le schematizzazioni sono sempre limitative, ma anche la terminologia corrente è troppo povera di significati. Ad esempio, quando si parla di *sistemi esperti*⁽⁶⁾ spesso si intendono due distinte metodologie: una dei sistemi che cercano di emulare il ragionamento umano (usando regole dettate da esperti umani) ed una dei sistemi che cercano di emulare i funzionamenti del cervello umano. Questo fatto può rendere ambiguo il termine “*sistemi esperti*” perché i primi usano l'esperienza acquisita e trasmessa dall'esperto, mentre i secondi se la costruiscono con apprendimenti attivi. In realtà, le due metodologie si incontrano sovrapponendosi in virtù anche del fatto che le basi di conoscenza sono comunque fornite dall'operatore che li costruisce.

In entrambe le metodologie i calcolatori giocano il ruolo di “*protesi*” del *cervello umano* del quale non possono diventare succedanei, anche se la loro recente velocità di crescita⁽⁷⁾ potrebbe far pensare il contrario. Ma i problemi si hanno quando si cerca di definire l'*intelligenza naturale* che nei vocabolari viene indicata come prerogativa strettamente umana e caratteristica distintiva della superiorità dell'uomo sugli animali – anche se talvolta le sue manifestazioni non sono poi così nobili come si vorrebbe che fossero. Nel caso delle macchine il concetto è più semplice che con gli umani, infatti si considera un calcolatore (o un programma) “intelligente” quando le sue reazioni a determinati stimoli risultano indistinguibili da quelle di un esperto umano (*test di Turing*).



Fig. 5.3. – Classificazione delle capacità attribuite all'intelligenza.

Il concetto di intelligenza è comunque molto complesso soprattutto perché attitudini prettamente umane spesso si mescolano con attitudini animali. Ad esempio, un umano, osservando una fotografia,

individua subito l'immagine di un gatto distinguendola anche da quella di un suo simulacro (statua o pupazzo di pelouche che sia). È poco plausibile che il riconoscimento avvenga attraverso deduzioni concatenate e non è chiaro se avvenga con i medesimi meccanismi che usano gli animali. Si ritiene probabile che il riconoscimento sia frutto di meccanismi associativi – tipo quelli delle *memorie associative*, che associano ad un input X un output Y , o *auto-associative*, che associano ad un input ($X + \text{rumore}$) un output X . In effetti all'intelligenza umana si attribuiscono le capacità schematizzate in fig. 5.3, che comprendono le abilità degli animali (intelligenza inconscia). La componente simbolica (intelligenza conscia) si collega con diversi tipi di percezione del mondo esterno:

⁽⁵⁾ L' *Intelligenza Artificiale* (AI) nasce di fatto con i calcolatori, nel tentativo di cercarne utilizzi *avanzati*. Si pensi a *problemi di tipo combinatorio* come ad esempio quello di un imprenditore che deve assegnare N lavori ad N persone che lavorano con rendimenti diversi R_{ij} . Per ottimizzare il rendimento complessivo $R = \sum R_{ij}$ bisogna confrontare $N!$ soluzioni diverse. Con $N=20$ le soluzioni sono $20! = 2 \cdot 10^{18}$ (esplosione combinatoria).

⁽⁶⁾ I primi sistemi esperti sono stati costruiti con obiettivi medici nel settore diagnostico e per analisi di dati sismici nelle ricerche di giacimenti petroliferi.

⁽⁷⁾ In appena una cinquantina d'anni si sono attraversate cinque generazioni di macchine dopo la millenaria fase degli abachi e delle calcolatrici:

GENERAZIONE	COMPONENTE ELEMENTARE	CARATTERISTICHE
Prima (1950÷60)	Valvole termoioniche	Circuiti analogici
Seconda (1960÷70)	Transistor	Logiche numeriche e ibride
Terza (1970÷80)	Circuiti integrati	Linguaggi evoluti
Quarta (1980÷90)	CIP – calcolo parallelo – mainframe	Software alto livello/Basi di dati
Quinta (1990÷)	PC – alta integrazione software/hardware	Reti planetarie di calcolatori

- *classificatoria* (la berlina è un tipo di automobile) dette di tipo «*is-a*»;
- *strutturale* (lo sterzo è un organo dell'automobile) dette di tipo «*part-of*»;
- *causale – causa-effetto* (un'automobile molto veloce in curva tende ad uscire di strada);
- *prescrittiva* (non si deve frenare improvvisamente sul bagnato);
- *empirica* (se fari, quadro e motore non si accendono, probabilmente la batteria è scarica).

L'intelligenza umana *inferisce* conoscenza attraverso meccanismi diversi (che nel mondo dell'*intelligenza artificiale* vengono indicati col nome di *motori inferenziali*):

- inferenza deduttiva (es. sillogismi): «X è un'auto»; (2) «le auto hanno uno sterzo»; (3) «X ha uno sterzo»;
- inferenza induttiva (generalizzazione): es. corretta: (1) «X ha uno sterzo»; (2) «X è un'auto»; (3) «tutte le auto hanno uno sterzo»; es. errata: (1) «X è Fiat»; (2) «X è un'auto»; (3) «tutte le auto sono Fiat»;
- inferenza analogica: dai tre frammenti «X è un'auto» (1), «X ha uno sterzo» (2), «Y è un'auto» (3), si può indurre, generalizzando, dalle affermazioni (1) e (2) che «tutte le auto hanno uno sterzo» (4) e dedurre dalle affermazioni (3) e (4) che «Y ha uno sterzo» (5).

Volendo costruire emulatori del cervello umano sono anche importanti alcuni confronti fra i calcolatori disponibili ed i cervelli da emulare.

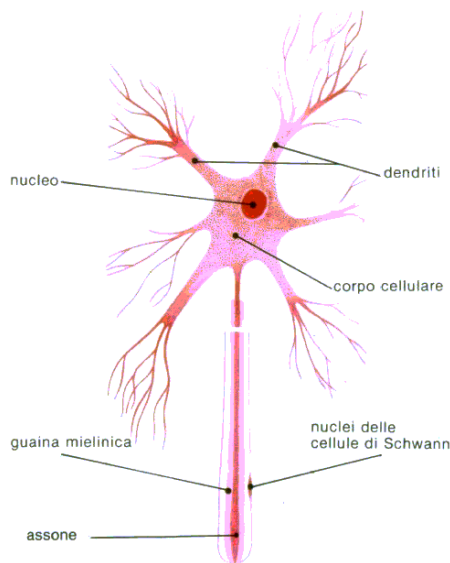


Fig.5.4 – Rappresentazione schematica di un neurone naturale.

Il cervello umano (peso poco superiore al chilo e volume dell'ordine del litro) è un'enorme rete (dell'ordine di 10^{11} nodi) di cellule nervose (neuroni⁽⁸⁾). Ogni neurone (v. rappresentazione schematica riportata in fig. 5.4) è generalmente connesso con decine di migliaia di altri neuroni, che insieme sviluppano un numero di connessioni dell'ordine di 10^{15} .

Le prestazioni dei neuroni sono caratterizzate da una velocità di intervento molto bassa rispetto a quella dei componenti elementari dei calcolatori (tempi di commutazione dell'ordine del millisecondo contro la decina di nanosecondi, ovvero 10^{-3} secondi contro 10^{-8} secondi), ma le prestazioni del cervello umano sono molto elevate per merito della ricchezza della rete di neuroni in termini di numero di nodi e di connessioni.

Per un confronto si può far riferimento alla [*connection machine*](#) (un calcolatore realizzato con 65.536 processori in parallelo ciascuno con 64 Kbit di memoria) come in tab. 5.1⁽⁹⁾. Un fattore importante a vantaggio dei calcolatori è la grande velocità di evoluzione (si valutano costi 10 volte inferiori ogni 5 anni), mentre a favore del cervello umano sta la plasticità nelle connessioni, dimostrata dal fatto che interventi chirurgici localmente

⁽⁸⁾ Un neurone è costituito da un corpo cellulare (*soma*) dotato di numerose fibre nervose (*dendriti*) che lo collegano agli assoni di altri neuroni tramite giunzioni dette *sinapsi*. I collegamenti possono essere *eccitatori* o *inibitori* e l'eccitazione/inibizione sono processi a *soglia* (che possono essere variati, ad esempio, per via chimica: il caffè è un eccitante e tende ad abbassare la soglia). Sono dedicati a funzioni definite: (1) i «*neuroni sensoriali*» ricevono l'*input* dai sensi (olfattivi, uditivi, tattili, ecc.); (2) i «*moto-neuroni*» agiscono in *output* sui muscoli; (3) i «*neuroni intermedi*» ricevono *input* da neuroni e trasmettono *output* ad altri neuroni.

⁽⁹⁾ Si stima che, immaginando di usare 100 atomi per memorizzare una lettera dell'alfabeto (una decina di bit per lettera), per archiviare tutto il sapere tramandato dai monaci di tutto il mondo sarebbe sufficiente un cubo di materia con lato di 200 μm .

distruttivi possono non avere conseguenze gravi sui ricordi perché le connessioni vengono almeno in parte compensate.

Tabella 5.1. – Confronto delle prestazioni di un cervello umano con uno elettronico.

FUNZIONE	CERVELLO UMANO	CONNECTION MACHINE (1988)
Memoria	10^{15} bit	10^9 bit
Elaborazione	10^{16} bit/s	10^{12} bit/s

Per superare la rigidità delle connessioni elettroniche l'AI ha messo in moto un paradigma informatico basato sull'elaborazione della conoscenza (piuttosto che quella dei soli dati) vista come collezione (non necessariamente ordinata) di: (i) descrizioni di oggetti; (ii) relazioni fra oggetti; (iii) descrizioni di eventi; (iv) relazioni fra eventi; (v) situazioni tipiche; (vi) ecc.. Una «base di conoscenza» così concepita può spesso essere manipolata con regole del tipo «if then» o simili. Si tratta di prendere uno o più esperti, condensare la loro esperienza sotto forma di regole o cornici e programmarla in un sistema automatico. Un tale procedimento è generalmente attuabile (si pensi alla sfida a scacchi fra [Deep Blue e Kasparov](#)) anche se non è facile competere con l'esperto umano soprattutto per due ragioni: da una parte i meccanismi dell'umano non sono sempre chiaramente esplicitabili, quindi risultano difficili da implementare su calcolatore; dall'altra un esperto umano aumenta la sua conoscenza mentre opera ed in più è capace di adattarsi all'interlocutore ed alle circostanze.

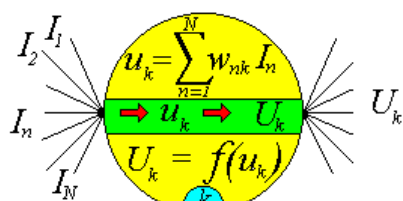


Fig.5.5. – Schema di neurone artificiale.

(terabyte = 10^{12} byte).

I primi successi hanno indotto nuovi studi stimolati anche dalle prospettive di macchine che stavano crescendo in potenza e diminuendo di prezzo. Sono nati così linguaggi di programmazione dedicati come LISP e PROLOG. Ricordiamo che il settore traina tecnologie con notevoli sbocchi economici, quali quelli della robotica militare ed industriale. Queste circostanze hanno permesso di esplorare nuove metodologie basate sul paradigma connessionista (emulare il cervello umano piuttosto che il ragionamento umano) appoggiato ad apprendimenti adattativi. Un sistema adattativo A emula un sistema reale B operando in parallelo con esso per un certo tempo e modifica la sua struttura interna in funzione dell'errore comportamentale, fino a minimizzare (magari annullare) ogni differenza. Si tratta di realizzare un sistema (rete neurale) nel quale vi siano: (a) elementi di input; (b) elementi di output; (c) memorie; (d) strumenti per realizzare apprendimenti adattativi e per dare plasticità al sistema (neuroni nascosti).

Un neurone artificiale (AN) è un oggetto (software, hardware o ibrido) che effettua due operazioni (v. fig. 5.5): una composizione lineare (somma pesata, u_k) dei segnali che riceve ed una trasformazione (generalmente non lineare) della risultante u_k in un segnale $U_k = f(u_k)$ che trasmette in uscita. Il neurone si attiva quando riceve qualcosa, cioè funziona quando riceve un segnale che supera un valore di soglia. Collegando più AN si ottiene una rete (Network) artificiale di neuroni

Questi sistemi, che in genere si propongono di risolvere problemi difficilmente trattabili con le tecniche tradizionali, hanno l'obiettivo di raggiungere soluzioni della stessa qualità dell'esperto umano (come per la sfida a scacchi fra Deep Blue (3 e 1/2) e Kasparov (2 e 1/2) del maggio 1997) comportandosi come un esperto umano (test di Turing). Per effetto della macchina i sistemi esperti artificiali sono: più rapidi dell'umano; coerenti e stabili nel tempo (mentre l'umano è umorale!); capaci di usare grandi moli di dati

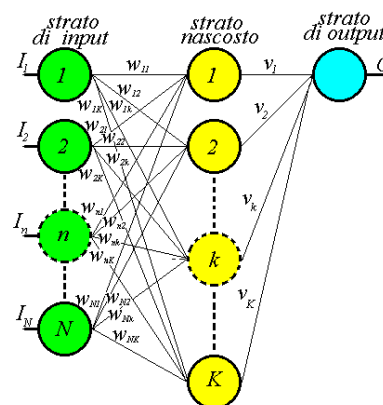


Fig.5.6. – Esempio di architettura di reti neurali artificiali.

(*ANN*). L'architettura della rete condiziona usi e prestazioni dello strumento che è adattativo, perché modificando i pesi w_{nk} si può ottimizzare la prestazione della rete, e plastico, perché neutralizzando alcuni neuroni non si compromette il funzionamento della rete. Con un tale strumento è possibile organizzare sessioni di apprendimento se si dispone di un congruo numero di *esperienze* ciascuna costituita da una tabella di dati di input e da una corrispondente tabella di dati di output. Infatti, ciascuna esperienza fornisce una condizione per calcolare i pesi. Se queste condizioni sono sufficienti (indipendenti ed in numero maggiore od uguale del numero dei pesi) si possono calcolare i pesi che ottimizzano le prestazioni della rete (ad esempio, rendendo minima la differenza fra dati sperimentali e valori calcolati dalla rete). Usando opportunamente la sessione di apprendimento è possibile, in particolare, fornire risultati caratterizzati in termini statistici (media, deviazione standard, skewness, curtosi, ecc.) e aggiornare l'apprendimento.

Le *ANN* vengono talvolta accusate di prescindere dalle basi teoriche dei processi, ma se ciò avviene lo si deve al progettista, che non ha saputo scegliere architetture adeguate. Del resto, sono disponibili anche software capaci di ricostruire automaticamente percorsi di regole «if .. then..» equivalenti ad una *ANN* a partire dalla struttura della rete e dai valori dei pesi.

Un esempio di rete neurale artificiale utilizzata in processi ambientali è riportata in fig. 5.6. Essa è formata da N unità di input (neuroni $n = 1, 2, \dots, N$) ognuna delle quali comunica con le unità di uno strato nascosto (neuroni $k = 1, 2, \dots, K$) e queste informano l'unico neurone in uscita. Scegliendo i neuroni dello strato di input in modo appropriato si sono ricostruiti spezzoni di dati mancanti di serie temporali (interpolazione) e si sono fatte previsioni di parametri atmosferici.

5.4. – Formalismi matematici

La matematica come disciplina è nata dalla necessità di rappresentare oggetti e di sviluppare ragionamenti da applicare ad essi. In seguito è diventata anche uno strumento di sintesi e di generalizzazione della conoscenza. Così, i numeri sono nati dall'utilità di rappresentare una molteplicità di oggetti (contare e ordinare) e le operazioni dalla utilità di distribuire (aggregare o disgregare) oggetti che fanno parte di insiemi: aggiungere (sommare)/togliere (sottrarre) oggetti da una «riserva» prima e moltiplicare/dividere poi. Progressivamente le operazioni dirette furono completate dalle relative operazioni inverse e richiesero la generalizzazione dei loro operandi: i numeri relativi per la sottrazione, i numeri razionali per la divisione ed i numeri irrazionali e quelli complessi per l'estrazione di radice. Nacque poi l'utilità di introdurre i logaritmi per ridurre il grado degli operatori (e semplificare i calcoli) e, per la geometria, quella di trattare gli angoli (trigonometria). L'introduzione del calcolo letterale ha trasformato le operazioni in operatori e prodotto il concetto di funzione. Il concetto di limite ha poi permesso di dare continuità all'insieme dei numeri (fra due elementi è sempre possibile interporne un terzo⁽¹⁰⁾) e di costruire gli operatori differenziali: le derivate come operatori diretti e gli integrali come operatori inversi. I problemi possono sempre essere ricondotti a confronti ($>$, $=$, $<$) fra funzioni.

In generale, per rendere riproducibili dei dati sperimentali (la conoscenza empirica alla base della conoscenza scientifica) è sufficiente considerare un polinomio (o altra funzione esplicita che piaccia di più) che raccordi (o addirittura che colleghi) quei dati. Allora ci si può chiedere perché mai si faccia tanto uso di astruse equazioni differenziali o integrali o integro-differenziali o di formalismi complicati. Non sarebbe meglio usare direttamente funzioni esplicite magari algebriche visto che alla fine si cerca di arrivare a qualcosa di questo tipo? La domanda è ovviamente legittima e un tale obiettivo lo si deve comunque sempre perseguire prima di imbarcarsi in equazioni che poi necessitano di essere integrate, ma il procedimento porta quasi sempre a relazioni non generali al punto che già le interpolazioni (i valori fra due punti sperimentali) rischiano di essere inaffidabili. Il motivo è semplice. Infatti, per costruire un modello generalizzabile (ovvero la cui validità non si limiti ai punti sperimentali sui quali si appoggia) si devono utilizzare formule che derivino da principi generali e questi sono, per ovvie ragioni, espressi in forme che devono essere indipendenti

⁽¹⁰⁾ Il paradosso di Zenone ne è una conseguenza.

dal sistema usato per ottenerle (in altre parole, tali principi devono valere anche per sistemi diversi da quello per il quale sono stati formulati). Ciò si ottiene, quasi sempre, solo considerando sistemi infinitesimi ed è per questo che le relazioni finiscono per essere relazioni fra grandezze infinitesimali, appunto come quelle dell' *Analisi Infinitesimale*.

5.5. – Considerazioni sui simulatori formali

Lo schema di figura 5.1. classifica i simulatori distinguendoli da un punto di vista concettuale, in base alla loro “essenza”. Secondo questo criterio, modelli di simulazione formali possono essere attribuiti a 2 categorie:

- a) *simulatori deterministici*, che stabiliscono relazioni certe di causa-effetto fra variabili e forniscono come risultato un unico valore numerico;
- b) *simulatori statistici*, che stabiliscono relazioni fra variabili caratterizzate da un margine di incertezza e forniscono come risultato un intervallo di valori (un valore numerico + o – una quantità).

I secondi possono inoltre essere distinti in due ulteriori sotto categorie:

- i. *modelli statistici*, che utilizzano i principi (e quindi le regole) della statistica per interpretare conoscenze incerte;
- ii. *simulatori stocastici*, che usano relazioni causali tenendo conto della componente casuale della conoscenza disponibile.

Il modello deterministico più importante è senz'altro fornito dalle equazioni di bilancio, che essendo generali devono comunque essere soddisfatte anche dai modelli statistici.

I modelli statistici riguardano applicazioni della teoria delle probabilità ad eventi che sono stati determinati in termini di ricorrenze (frequenze con le quali si ripropongono). I simulatori stocastici sono invece formulazioni aprioristiche dei fenomeni spesso derivate da modelli deterministici (ad esempio i modelli che utilizzano il *metodo Montecarlo*).

Si mette in rilievo anche l'esistenza di una qualche confusione nell'uso dei termini «statistico», «probabilistico» e «stocastico», tutti riferiti a processi in qualche misura casuali. Ad esempio, il termine «statistico» si usa per indicare dati (come i dati dei censimenti) e «stocastico» come sostitutivo di casuale. Così pure «frequenza» viene confuso con «probabilità», ecc.

Se invece delle caratteristiche costitutive consideriamo le procedure di calcolo utilizzate, possiamo distinguere i simulatori formali assegnandoli ad altre categorie (ad esempio simulatori fenomenologici, numerici, ecc.) che potranno rientrare nel caso statistico” o “deterministico” a seconda che forniscano dati provvisti o meno di incertezza.

Di seguito si illustreranno alcuni esempi relativi alle categorie sopra indicate.

5.6. – Simulatori deterministici

Il determinismo nella fisica del secolo scorso ha spesso creato difficoltà concettuali che possono essere compendiate in una frase attribuita ad Einstein (*Dio non gioca a dadi*) ed in una frase latina già riportata (*natura non facit saltus*). La prima voleva mettere in dubbio i fondamenti della meccanica quantistica (v. [principio di indeterminazione](#)) e la seconda voleva affermare un concetto primitivo di consequenzialità degli eventi. È evidente che entrambe le affermazioni non considerano l'indeterminatezza intrinseca della conoscenza umana (della quale si è accennato in precedenza) e la sua natura discreta, ma è anche evidente che la modellistica non può prescindere dai legami fra presente e passato né dalle difficoltà a formulare certezze.

I simulatori deterministici si possono ricondurre a forme del tipo:

$$F_i(\underline{r}, t; \underline{p}) = 0 \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots, I$$

dove il legame funzionale, $\underline{F} \equiv (F_1, F_2, \dots, F_I)$, fra le variabili spaziali \underline{r} , il tempo t , ed i parametri \underline{p} (con $\underline{p} \equiv (p_1, p_2, \dots, p_n) = \text{coordinate dello spazio delle fasi}$) può essere dato da equazioni ordinarie, differenziali, integrali, integro-differenziali, scritte in forma implicita o esplicita. La natura deterministica del legame consiste nel fatto che le equazioni esprimono corrispondenze certe fra le

variabili in gioco. Le equazioni inoltre possono essere empiriche (se non poggiano su principi, come nel caso delle interpolazioni polinomiali) o non empiriche (se derivano da principi, come nel caso delle equazioni di bilancio).

Un'ulteriore classificazione dei modelli deterministici può essere fatta in rapporto alla scala spaziale delle osservazioni alle quali si riferiscono. Infatti, i parametri che entrano nelle equazioni

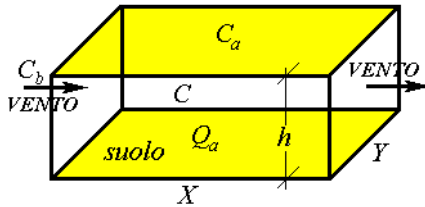


Fig. 5.7. - Schema di modello a box per lo studio di inquinamenti atmosferici.

possono riguardare diversi livelli di aggregazione spaziale e vengono detti "a parametri concentrati" (quelli più aggregati) e "a parametri distribuiti" (quelli spazialmente più dettagliati). Il più aggregato dei modelli viene detto *a box* (v. fig. 5.7) perché considera il sistema come una scatola priva di risoluzione spaziale. Un tale schema è molto usato per lo studio dell'inquinamento atmosferico di ambienti per i quali è difficile parametrizzare in dettaglio le equazioni di bilancio. Allora, i modelli a *box* costituiscono un compromesso molto utile per la loro semplicità e per la conseguente loro duttilità nel dar evidenza a singoli aspetti dei problemi. In particolare,

sono adatti a descrivere l'inquinamento prodotto da un insieme di sorgenti complesse (come ad esempio un'area urbana) assumendo che gli inquinanti siano distribuiti uniformemente all'interno di un parallelepipedo. Dal punto di vista formale ciò equivale a considerare velocità di diffusione infinita, ovvero coefficienti di dispersione infinitamente grandi. Una tale assunzione produce nel modello la dispersione istantanea in tutto il volume dell'inquinante immesso nel *box*. L'inquinante presente nel *box* proviene da sorgenti interne o da apporti avvevativi dovuti al vento o da flussi che attraversano la sommità del parallelepipedo (intrusioni) a causa delle variazioni di altezza del *box*. L'altezza del *box* generalmente viene fatta coincidere con l'altezza dello strato di rimescolamento dell'atmosfera (*mixing layer*).

L'equazione di bilancio che descrive il processo illustrato ha la forma:

$$\overbrace{X h \frac{\partial C}{\partial t}}^{\text{accumulo}} = \overbrace{X Q_a}^{\text{sorgenti}} + \overbrace{h u (C_b - C)}^{\text{ingressi laterali}} + \overbrace{X \frac{\partial h}{\partial t} (C_a - C)}^{\text{ingressi dall'alto}}$$

dove: X è l'ampiezza del *box* lungo la direzione del vento; Q_a la portata specifica (flusso) delle sorgenti al suolo; h l'altezza del *box*; C la concentrazione all'interno del *box*; C_b la «concentrazione di fondo» trasportata nel *box* dal vento; C_a la concentrazione in quota.

Il primo membro dell'equazione esprime la velocità con la quale l'inquinante si accumula nel *box*. Tale velocità è pari alla somma delle velocità di generazione (termine di sorgente = $XY \cdot Q_a$), di trasporto dovuto al vento (= $hY \cdot u \cdot (C_b - C)$), di intrusione per variazione di volume del *box* (conseguente alla variazione dell'altezza h o a subsidenze e pari al prodotto $XY \cdot (C_a - C) \cdot \partial h / \partial t$) e di generazione per reazione chimica (non esplicitato nella formula).

Se si considerano condizioni stazionarie, ovvero si pone $\partial C / \partial t = \partial h / \partial t = 0$ e si considera nulla la concentrazione di fondo ($C_b = 0$), si ottiene:

$$C = X Q_a / (h u) = \tau Q_a / h$$

dove $\tau = X/u$ è il tempo di permanenza dell'aria nel *box*.

Questa forma per C può essere generalizzata con l'analisi dimensionale. Infatti, un processo controllato dalle variabili dimensionali C , τ , Q_a , h dipende da un unico prodotto adimensionale, che deve essere costante. Tale prodotto ha la forma $\Pi = C^\alpha \tau^\beta h^\gamma Q_a$ che è soddisfatta dimensionalmente se $\alpha = -1$, $\beta = 1$ e $\gamma = -1$.

Per condizioni di calma di vento ($u=0$) si arriva allo stesso risultato integrando l'equazione di bilancio sotto alcune ipotesi semplificative (C_a sia trascurabile rispetto a C e Q_a vari poco alle

scale di variabilità temporale di C). In questo caso, però, il tempo τ indica la durata dell'evento di calma.

Se il *box* rappresenta una porzione di territorio inquinata da traffico automobilistico (strada, quartiere o città), le variabili meteorologiche sono comprese nel tempo di permanenza τ e nell'altezza di rimescolamento h , mentre Q_a dipende dalle caratteristiche del traffico (ovvero dai flussi di emissione dei precursori). L'energia solare e le emissioni di precursori intervengono nella cinetica di reazione r quando si considerano inquinanti secondari *fotochimica*⁽¹¹⁾.

Nei modelli *multibox* (v. fig. 5.8), il volume di trasporto viene scomposto in più elementi

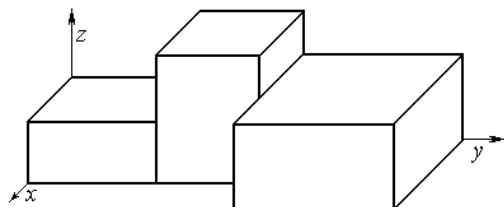


Fig.5.8 – Esempio di *multibox*.

comunicanti tra loro. In ciascun elemento la concentrazione dell'inquinante è uniformemente distribuita ed il flusso di uscita da un *box* è quello di entrata nel *box* contiguo. In questo modo è possibile sviluppare una discretizzazione spaziale che in linea di principio può essere spinta a qualsiasi livello di dettaglio seguendo le caratteristiche morfologiche dell'ambiente da simulare. Naturalmente, quello che

si acquisisce in specificità del modello si paga in termini di complessità di calcolo e non tutto si recupera in funzionalità delle relazioni fra i diversi parametri.

Un esempio di modello a *box* che ha avuto notevole successo in idrologia è quello (noto come modello di *Nash*) che viene usato per descrivere la risposta di un bacino imbrifero ad una pioggia istantanea di ampiezza unitaria (ideogramma unitario, *IUH*). La trattazione matematica di tale modello viene affrontata in appendice. Anche il modello di *Nash* è generalizzabile e da esso sono state ottenute, ad esempio, le portate di sostanze solubili asportate - per dilavamento - dai terreni dei bacini agricoli ad opera delle piogge.

La lista dei modelli basati su schematizzazioni fenomenologiche è molto lunga ed è inutile passarla in rassegna perché si dovrebbero esaminare casi particolari, mentre in questo contesto interessa segnalare solo la grande varietà di situazioni possibili e di strumenti adatti ad interpretarle.

5.7. – I simulatori statistici/stocastici

I simulatori stocastici⁽¹²⁾ si possono ricondurre a forme del tipo:

$$F_i(\underline{r}, t; \underline{p} + \underline{\eta}) = \varepsilon_i \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots, I$$

dove le ε_i sono «funzioni di rumore» che caratterizzano in modo statistico il legame funzionale, $\underline{F} \equiv (F_1, F_2, \dots, F_I)$, fra le variabili spaziali, \underline{r} , il tempo, t , ed i parametri, $\underline{p} \equiv (p_1, p_2, \dots, p_b)$ eventualmente dotati di errore $\underline{\eta} \equiv (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_b)$. Rientrano in questa categoria anche le forme deterministiche $F_i(\underline{r}, t; \underline{p}) = 0$ con uno o più parametri stocastici definiti, cioè a meno di un rumore: $\underline{p} = \underline{p} + \underline{\eta}$.

Anche per i simulatori stocastici le relazioni fra variabili possono essere date da equazioni ordinarie, differenziali, integrali, integro-differenziali, scritte in forma implicita o esplicita. La natura stocastica del legame consiste nel fatto che le equazioni esprimono corrispondenze fra le variabili in gioco definite in probabilità e, come per i simulatori deterministici, le equazioni possono essere empiriche o non empiriche.

I simulatori statistici comprendono due vaste categorie di modelli formali: una riguarda gli strumenti propri delle indagini statistiche (statistiche generali, analisi delle distribuzioni, analisi delle componenti principali, analisi dei *cluster*, analisi delle *regressioni*) che si applicano ai dati indipendentemente dalla loro origine (sperimentale o teorica) ed una riguarda i metodi Montecarlo con i quali è possibile conferire struttura statistica ai modelli deterministici.

⁽¹¹⁾ Si dicono secondari gli inquinanti che non derivano direttamente da immissioni, ma sono prodotti in atmosfera per reazione di inquinanti primari (emessi dai camini) e componenti dell'atmosfera. Si dicono fotochimici gli inquinanti dovuti ad un complesso sistema di reazioni chimiche catalizzate dai fotoni provenienti dal Sole.

⁽¹²⁾ I termini statistico e stocastico sono sinonimi (v. <http://it.wiktionary.org/wiki/stocastico>) ma è utile dare ad essi significati leggermente diversi

Le statistiche generali sono un passaggio obbligato quando si abbia un numero consistente di dati da trattare. Infatti, è sempre opportuno valutare il valor medio dell'insieme dei dati; gli estremi dell'insieme; il momento secondo (più precisamente la deviazione standard), terzo (più precisamente la *skewness*) e quarto (più precisamente la *curtosi*). La [skewness e la curtosi](#) danno delle informazioni sulla distribuzione dei dati che spesso sono sufficienti per gli studi ambientali, ma, all'occorrenza, esistono test specifici per ottenere informazioni più approfondite. Altre considerazioni riguardano le serie temporali di dati per le quali è importante lo studio delle tendenze e del carattere della serie (autocorrelazione dei dati).

L'analisi dei *cluster* permette di valutare l'esistenza di raggruppamenti di dati che possono individuare eventuali multimodalità ed indicare i possibili generatori. Informazioni analoghe si possono ottenere dallo studio delle componenti principali che sono anche in grado di suggerire possibili indicatori ambientali aggregati.

Considerazioni a parte vanno fatte per le analisi con modelli *AR* (*Analisi delle Regressioni*) che spesso vengono accoppiate con l'analisi di medie mobili, *MA* (*Mobile Average*) per formare modelli *ARMA*, dei quali la forma più generale sono gli *ARMAX* (modelli *ARMA* con componenti esogene). Si tratta di modelli molto usati perché semplici e molto efficaci che nella versione più generale hanno la forma:

$$y(t) = \sum_{i=1}^p a_i y(t-i) + \sum_{j=1}^q b_j u(t-j) + \sum_{k=1}^r c_k e(t-k) + e(t)$$

dove: y è la variabile che si vuole predire al tempo t in base a p misure precedenti; u è una variabile esterna alla serie temporale dei dati da predire; e è un rumore bianco a valore atteso nullo. I parametri a_i , b_j , c_k , sono stimati sulle serie storiche di y e u .

Questi modelli sono piuttosto «*miopi*» perché empirici ed incapaci di distinguere effetti causali da effetti occasionali. La loro struttura lineare può essere by-passata quando si conosca la forma dei contributi non lineari, ma è sempre importante procedere con cautela per evitare il rischio di attribuire significati casuali a processi che invece sono deterministici, come ad esempio, nel caso dei processi caotici.

È doveroso anche ricordare che i metodi Montecarlo hanno dato (e danno) un contributo rilevante al mondo variegato degli artifici numerici e spesso costituiscono l'unica strada per introdurre termini di rumore nelle simulazioni deterministiche. Sono modelli basati su generatori di numeri «a caso», generatori che ormai sono presenti in tutti i linguaggi di programmazione, anche in quelli più elementari. Ad esempio, nella versione italiana del foglio elettronico EXCEL (di OFFICE XP) il generatore di numeri casuali è una funzione che si chiama CASUALE(). La sua sintassi è «=CASUALE()» e restituisce un numero casuale distribuito in maniera uniforme maggiore od uguale a 0 e minore di 1, mentre la funzione «=CASUALE()*(b-a)+a» da un valore casuale maggiore od uguale ad a e minore di b .

Infine, ricordiamo che spesso i numeri reali sono risultati troppo poveri per descrivere situazioni generalmente molto articolate e che talvolta si sono dovute introdurre nuove grandezze. Ad esempio, con i numeri complessi si possono manipolare contemporaneamente due informazioni: una parte reale ed una immaginaria (o, se si vuole, un'ampiezza ed una fase); con i frattali si considerano l'ampiezza di un oggetto e la dimensione dello spazio nel quale tale oggetto è immerso. E in campo ambientale è sempre presuntuoso avventurarsi nelle certezze sapendo di non possederne la chiave. Una prospettiva per ridurre i disagi delle simulazioni esatte si può intravedere nella teoria degli insiemi fuzzy.

La logica *fuzzy* (in inglese il termine fuzzy significa "sfumato" o "sfuocato") si fonda sulla considerazione che gli elementi del pensiero umano sono più propriamente rappresentabili come oggetti che appartengono ad una classe in modo "sfumato". Per questo tipo d'insiemi un elemento ha un grado d'appartenenza variabile fra zero e uno. Se, ad esempio, si vuole indicare «la

temperatura di 15°C» (cioè una temperatura misurata usando un termometro con la precisione di un grado che ha dato luogo alla lettura di 15°C), in una rappresentazione classica si intende che essa può esprimere indifferentemente uno dei valori compresi fra 14,6°C e 15,5°C, ovvero che la misura ha la stessa probabilità $\mu(T)$ di assumere uno dei valori compresi nell'intervallo (14,6°C, 15,5°C) come descritto nel diagramma (a) di fig. 5.10.

Se, però, il significato che si vuol dare al termine «temperatura di 15°C» è quello di «una temperatura che più probabilmente è di 15°C, ma può assumere tutti i valori dell'intervallo (14,6°C, 15,5°C) con probabilità che sfuma andando verso gli estremi», allora il concetto è espresso più compiutamente dal diagramma (b) di fig. 5.10. Questo modo di esprimersi richiede che ogni dato sia corredato da una funzione caratteristica, la quale stabilisce il grado di appartenenza (in termini probabilistici) del dato all'intervallo di riferimento. Senza entrare nel merito di definizioni rigorose degli insiemi fuzzy e delle relative algebre è bene ricordare che esistono anche nuovi modi per “far di conto” e che questi modi vengono sempre più spesso associati agli strumenti dell'Intelligenza Artificiale per dare maggiore “umanità” ai previsori automatici.

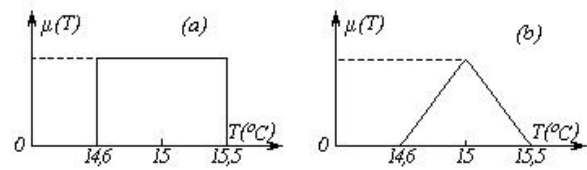


Fig. 5.10. - Rappresentazione della temperatura di 15°C in un universo classico (a) ed in un universo fuzzy (b).

5.8. – I simulatori fenomenologici

Una varietà di simulatori molto utili sono quelli che cercano di catturare caratteri salienti dei processi. Molto significativi sono gli sviluppi in serie di funzioni e fra essi quelli di potenze (Taylor e MacLaurin), di polinomi (Chebyshev, Legendre, Hermite, ecc.) e di funzioni trigonometriche (Fourier e Laplace) che permettono di approssimare, nelle rispettive condizioni di convergenza, i più svariati tipi di funzione fino ai più raffinati livelli di precisione. I coefficienti che pesano i diversi contributi hanno significati ben precisi: così, ad esempio, quelli degli sviluppi di Taylor e di MacLaurin danno le derivate della funzione che si vuole costruire mentre quello di Fourier individuano le frequenze degli eventi ricorrenti. Altre trasformate (come, ad esempio, le *wavelets*) sono poco popolari, anche se più «potenti» di quelle citate, probabilmente perché recenti e concettualmente più sofisticate.

L'analisi di Fourier è un metodo diretto per descrivere una serie temporale di dati (v. ad esempio, fig 4.3) ed il foglio elettronico *Excel* di *Microsoft* ne contiene una versione di uso facile ed immediato. Il metodo si basa su un teorema dell'analisi matematica secondo il quale per ogni funzione $h(t)$ che ammette l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt,$$

si può definire la seguente trasformata integrale (detta di Fourier):

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$$

e la sua inversa:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

dove i è l'unità immaginaria ($i = \sqrt{-1}$) ed $\omega = 2\pi f$ (con f = frequenza).

Nella pratica la funzione $h(t)$ è definita tramite alcune sue misurazioni h_n , effettuate in corrispondenza ad un numero discreto di istanti t_n ($n=1, 2, \dots, N$). Sia $\Delta t = (t_n - t_{n-1})$ l'intervallo di tempo fra campionamenti successivi e $T = N\Delta t$ la durata del campionamento (lunghezza della serie temporale). La trasformata di Fourier, allora discreta e regolare, risulta definita dalla:

$$\hat{h}_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-2\pi i m \frac{n}{N}} \quad \text{con } m = 0, 1, \dots, (N-1) \text{ e } \omega_n = m \frac{n}{N} = 2\pi f_n.$$

L'esecuzione della trasformata discreta di Fourier secondo la formula che la definisce risulta numericamente molto onerosa, ma fortunatamente esiste un algoritmo che riduce notevolmente il numero delle operazioni ($N \log_2 N$ anziché N^2). Questo algoritmo, pur conservando le medesime caratteristiche essenziali, può assumere forme diverse e viene definito globalmente come *Fast Fourier Transform (FFT)*. L'algoritmo *FFT* richiede che il numero N di dati da trasformare sia una potenza di 2. Naturalmente il numero di dati disponibili non soddisfa in generale questo requisito. Per ovviare al problema si ricorre solitamente allo *zero padding*: si accodano cioè all'insieme di dati tanti zeri quanti sono necessari a raggiungere la più prossima potenza di 2.

Allo scopo di mettere in evidenza quali siano le componenti periodiche dominanti in un segnale, è opportuno introdurre una grandezza reale detta *spettro di potenza*. Si definisce spettro di potenza l'insieme delle N grandezze reali S_m :

$$S_m = \frac{1}{N} |h_m|^2 \quad \text{con } m = 0, 1, \dots, N-1$$

Il valore dello spettro di potenza in m può essere visto come la quantità di energia di h_m associata alla frequenza $m/N \Delta t$.

Per ottenere un migliore stimatore dello spettro di potenza si può procedere alla suddivisione della serie di dati in segmenti successivi ed effettuare su ciascuno la valutazione dello spettro di potenza. Successivamente si provvede per ognuna delle frequenze al calcolo della media dei valori determinati dalle trasformate dei diversi segmenti considerati. Sia K il numero di tali segmenti. La varianza della stima fatta per ogni frequenza viene con questo metodo ridotta di un fattore $1/K$ rispetto alla stima fatta sulla base dell'intera serie di dati (per la stima su f_0 e $f_{N/2}$ questi fattori devono essere raddoppiati).

Si vuole sottolineare come da un lato aumentare il numero di finestre diminuisca la varianza della stima che si ottiene, mentre dall'altro diminuisca il campo di frequenze sul quale si determina lo spettro. È perciò opportuno ricercare un equilibrio tra i due estremi, ricerca che avviene automaticamente in numerosi pacchetti di calcolo in commercio.

Vi è un secondo problema nella determinazione dello spettro di potenza perché la serie temporale della quale si esegue la trasformata si annulla *improvvisamente* alle estremità e ciò comporta che parte dell'*energia* associata a ciascuna frequenza “migri” sulle rimanenti. Per attenuare tale effetto è opportuno moltiplicare i valori della serie per una funzione $w(t)$ che vada progressivamente a zero alle estremità.

Aver individuato lo spettro di potenza di una serie temporale (o, comunque, di una sequenza ordinata di valori) permette considerazioni di vario tipo, ma, in primo luogo, consente di formulare modelli approssimati molto efficienti. Infatti, la trasformata di Fourier stabilisce una corrispondenza biunivoca fra spazio dei tempi e spazio delle frequenze e, individuate le frequenze principali, è immediato scrivere un modello approssimato del fenomeno tramite l'antitrasformata:

$$h_n = \frac{1}{N} \sum_{\lambda=0}^{L-1} \hat{h}_\lambda e^{-2\pi i \lambda \frac{n}{N}}$$

dove l'indice λ varia prendendo in considerazione solo le $L < M$ frequenze principali. Inoltre, spesso non è neppure necessario usare $h_n = h(t_n)$ perché, ragionando sulle frequenze, si possono confrontare le cadenze temporali delle serie di dati con quelle di fenomeni contemporanei e valutare eventuali coincidenze da considerare in chiave causale.

5.9. – Simulatori numerici

Per sviluppare un modello è spesso⁽¹³⁾ comodo stabilire relazioni differenziali perché è più facile individuare i contributi principali e distinguerli da quelli di approssimazione superiore. Allora questi ultimi si possono eliminare direttamente dai confronti, salvo poi ricordarsi che certi effetti possono essere causa di «contributi non lineari».

In ogni caso è utile tenere presente che discretizzando un'equazione differenziale del primo ordine (\underline{p} indica un vettore di parametri, C indica la grandezza considerata e t il tempo):

$$\frac{dC}{dt} = f(C, t; \underline{p})$$

si ottiene la relazione:

$$C_{i+1} = C_i + \Delta t f(C_i, t_i; \underline{p})$$

mentre discretizzando un'equazione differenziale del secondo ordine:

$$\frac{d^2 C}{dt^2} = f(C, C', t; \underline{p})$$

si ottiene la relazione:

$$C_{i+1} = 2C_i - C_{i-1} + \Delta t^2 f(C_i, C_{i-1}, t_i; \underline{p})$$

ed in generale per un'equazione di ordine n , la funzione C_{i+1} all'istante t_{i+1} dipende da n termini autoregressivi $C_i, C_{i-1}, \dots, C_{i-n+1}$.

Viceversa se si ha una relazione del tipo:

$$C_{i+1} = F(C_i, C_{i-1}, \dots, C_{i-n+1}, t_i; \underline{p})$$

si può sempre ottenere un'equazione differenziale:

$$\frac{d^n C}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} C}{dt^{n-1}} + \dots + a_n = \varphi(C, C', C^{n-1}, t; \underline{p})$$

in modo che ad una relazione di tipo autoregressivo basata su n precedenti si associa una dinamica di ordine n .

Se si vuole tenere conto delle caratteristiche spaziali dei fenomeni è necessario estendere queste considerazioni in modo da comprendere le derivate parziali della variabile dipendente calcolate rispetto allo spazio (ossia il suo gradiente) in modo da considerare i dati raccolti in postazioni vicine a quella di riferimento. Ad esempio, se $C(x, t; \underline{p})$ è la concentrazione dell'ozono all'istante t nel sito x che dipende da un parametro \underline{p} , allora le relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + a \frac{\partial C}{\partial x} &= F(x, t, \underline{p}) \\ \frac{\partial C}{\partial t} + a \frac{\partial C}{\partial x} &= \frac{C(x, t + \Delta t; \underline{p}) - C(x, t; \underline{p})}{\Delta t} + a \frac{C(x + \Delta x, t; \underline{p}) - C(x, t; \underline{p})}{\Delta x} \end{aligned}$$

consentono di estendere le considerazioni fatte a proposito di dati autoregressivi e di legare la concentrazione attuale misurata nel sito x con la concentrazione misurata in prossimità e/o in istanti precedenti.

⁽¹³⁾ Alcuni schemi permettono di procedere a partire da modelli integrali per arrivare a modelli differenziali come nel caso dei sistemi continui.

5.10. – Altri simulatori

Esistono modelli di simulazione che hanno qualche difficoltà a rientrare nelle categorie descritte nei paragrafi precedenti come, ad esempio, quelli che utilizzano unità

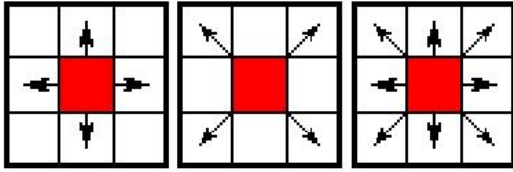


Fig. 5.11.- Tipi di «vicinato prossimo» in spazi bidimensionali.

automatiche capaci di funzionare come cellule autonome attraverso regole di connessione con un vicinato (v. in fig. 5.11 i tipi di «vicinato prossimo» in spazi 2D). Si tratta di sistemi (detti *automi cellulari*) nei quali al tempo t ogni cellula i si trova in uno stato $s_i(t)$ e passa,

al tempo $t+1$, ad uno stato $s_i(t+1)$ che è una funzione F (funzione di trasferimento) degli stati $s_j(t)$ delle cellule j del vicinato⁽¹⁴⁾.

Un particolare automa cellulare è quello ideato per simulare i comportamenti di una pila di sabbia. Si immagini di avere un eiettore che rilascia granelli di sabbia uno ad uno e che questi finiscano nel centro del piatto di una bilancia. Azionando una tale apparecchiatura si potrà osservare che, dopo un periodo transitorio durante il quale si forma un mucchio di sabbia, i granelli cominciano a debordare dal piatto. Da quel momento il peso del mucchio varia ad ogni rilascio dell'iniettore e lo fa ogni volta in modo diverso perché, mentre alcuni granelli non modificheranno il mucchio, altri produrranno il distacco di valanghe che fanno uscire dal piatto quantità più o meno rilevanti di sabbia. Il risultato è misurabile attraverso la bilancia che permetterà di registrare l'effetto di ogni singola iniezione. Senza realizzare l'apparecchiatura (qualcuno l'ha fatto) si può studiare il fenomeno simulandolo.

Il processo può essere concettualizzato immaginando che tutti i granelli gettati sul mucchio

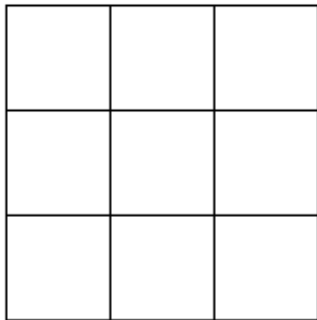


Fig. 5.12. – Automa cellulare per la pila di sabbia.

rimangano dove cadono a meno che non si sia raggiunto un valore critico oltre il quale il successivo granello di sabbia produce una valanga. Questo concetto può essere formalizzato con un *automa cellulare* che nella forma più semplice è descritto come segue (v. fig. 5.12): sull'elemento centrale di una scacchiera 3×3 vengono depositate, una alla volta, delle pedine. Dopo ogni deposizione si controlla la scena per applicare una «regola di capacità» («ogni elemento della scacchiera non può sopportare più di tre pedine»). L'elemento di scacchiera che viola la regola scarica una pedina attraverso ciascun lato (i lati di confine estromettono la pedina dalla scena). La configurazione delle scene che si succedono sono descritte dalle matrici \underline{N}^i riportate di seguito:

$$\underline{N}^0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{N}^1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{N}^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{N}^3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si arriva così al primo stato critico:

$$\underline{N}^4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

seguono tre configurazioni nelle quali il carico della cella centrale aumenta di un'unità fino a:

$$\underline{N}^8 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

le successive tre configurazioni caricano la cella centrale fino a raggiungere lo stato critico di 4 con:

⁽¹⁴⁾ Il vicinato può essere prossimo, come nei casi di fig. 5.11, ma anche remoto, come nel caso del gioco degli scacchi.

$$\underline{N}^{12} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

e si prosegue fino a:

$$\underline{N}^{16} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La configurazione \underline{N}^{16} è la prima che espelle pedine dalla scena (ne espelle 4). Dopo si procede in sequenza come segue:

$$\underline{N}^{20} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$$

$$\underline{N}^{24} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$$

$$\underline{N}^{28} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice \underline{N}^{28} è identica alla \underline{N}^{12} mentre la \underline{N}^{27} è diversa dalla \underline{N}^{11} per cui a partire dalla 28-esima configurazione lo schema si ripete con ciclo di 12 passi.

Il numero delle pedine presenti nella scena ad ogni passo (che è equivalente al peso registrato di volta in volta dalla bilancia per il mucchio di sabbia) è riportato nel diagramma di fig. 5.13 e mostra un andamento oscillante che richiama le fluttuazioni riscontrabili in molti processi ambientali.

Lo schema della scacchiera permette alcune considerazioni molto stimolanti:

1. pur con una scena semplice (3×3 elementi di una scacchiera) ed una regola evolutiva altrettanto semplice si ottiene uno schema con 28 stati diversi. Non deve creare problemi la ciclicità che dipende solo dalla modesta dimensione dello schema;
2. la struttura a soglia consente al sistema di autoorganizzarsi;
3. un sistema deterministico può manifestarsi in modo apparentemente casuale essendo dotato di struttura fluttuante (v. fig. 5.13);
4. la presenza di soglie supporta il fatto che gli eventi si distribuiscano su un numero discreto di stati (ovvero che sia lecito crearne delle categorie);
5. l'elevata quantità dei componenti può nascondere andamenti ciclici. Ad esempio, nel caso considerato, a partire da \underline{N}^{16} osservazioni con frequenza 12 forniscono sempre lo stesso valore.

A conclusione si osserva che lo schema descritto non è solo un gioco, infatti serve ad introdurre una teoria dell'evoluzione ambientale che va sotto il nome di «autorganizzazione per stati critici» (*self-organized criticality*) o «anticaos» (*antichaos*).

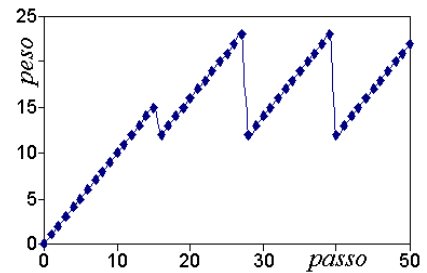


Fig. 5.13. – Numero di pedine presenti (peso) sulla scena ai diversi passi.

5.11. – Modelli per la regionalizzazione dei dati

L'operazione di base per descrivere i «campi scalari» (grandezze scalari distribuite su un territorio) consiste nel tracciare le isolinee del campo a partire da valori puntuali ottenuti sperimentalmente o da simulazioni. I dati a disposizione sono un insieme di valori ancorati ai punti P_{ij} di un sistema di riferimento cartografico bidimensionale (v. fig. 5.14). La caratteristica indiciale conferisce un ordine strutturale all'insieme dei dati permettendo di organizzarli in forma di matrice a due indici, \underline{A} , nella quale ciascun elemento, a_{xy} , è associato al valore del campo rilevato nel nodo (x, y) di un reticolo⁽¹⁵⁾.

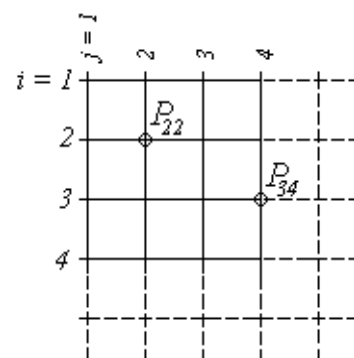


Figura 5.14 - Reticolo di riferimento.

Il termine *analisi spaziale* viene spesso usato per indicare l'insieme delle operazioni necessarie per tracciare i contorni di ugual valore del campo (isolinee). Più precisamente si

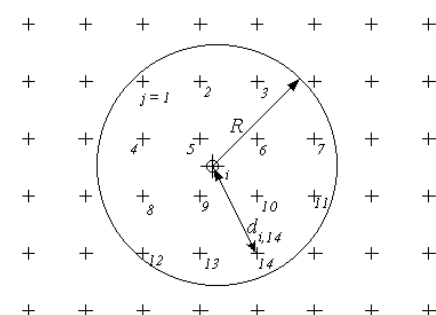


Fig. 5.15 - Rappresentazione del reticolo di osservazione, del punto di analisi e del raggio di competenza.

parla di *analisi soggettiva* nel caso si operi *a mano*, cioè senza l'aiuto di un calcolatore, oppure *analisi oggettiva* se si opera in automatico (più appropriati sembrano però i termini ugualmente usati di *analisi manuale* ed *analisi automatica*).

L'analisi manuale dei dati fa sostanzialmente riferimento ad un problema di buon senso: si cercano dei contorni che si adattino ai dati nel miglior modo possibile e che siano sufficientemente regolari da evitare non realistiche fluttuazioni su scale spaziali inferiori alle distanze che intercorrono fra le stazioni di osservazione.

Le tecniche di analisi oggettiva si rifanno ad operazioni di interpolazione, sia per riportare i valori del campo nei nodi di una griglia regolare di punti (v. fig. 5.15), sia per calcolare le curve di ugual valore. Le diverse funzioni di interpolazione hanno ognuna particolari proprietà spettrali e, quindi, «filtrano» diversamente i dati.

Come filtri possono essere usati polinomi (spesso gli *spline cubici*). Il maggior svantaggio di questa procedura è che dati errati o poco importanti possono pesare troppo sull'analisi finale.

Inoltre, questi schemi funzionano male con distribuzioni spaziali dei dati troppo sparse (poco uniformi). Si è perciò sviluppato un metodo per pesare le osservazioni tramite una funzione della distanza dal punto di analisi:

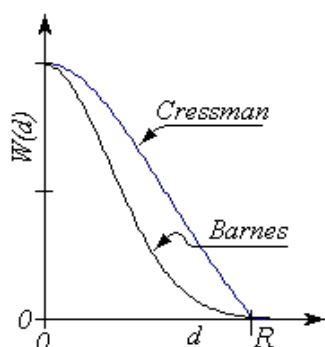


Figura 5.16 - Andamenti delle funzioni di Cressman e di Barnes.

$$Y_i = \sum_{j=1}^N W(d_{ij}) X_j$$

con:

$$\sum_{j=1}^N W(d_{ij}) = 1,$$

dove X_j indica la j -esima osservazione effettuata negli N punti compresi nella regione di influenza di raggio R che circonda il punto i al quale si riferisce l'analisi Y_i .

⁽¹⁵⁾ Se interessa operare su un reticolo regolare è: $x_i = (i - 1) \Delta x$ e $y_j = (j - 1) \Delta y$. In questo caso la matrice dei valori sperimentali contiene un numero di «buchi» che dipende dal posizionamento dei *detector*. Infatti, con *detector* «sparsi» è necessario lavorare su maglia molto più fine di quanto non richiederebbe lo stesso numero di *detector* collocati su un reticolo regolare. In genere, questo problema si supera con appropriati algoritmi che svincolano il reticolo dei dati da quello delle analisi.

Per quanto riguarda i pesi, sono di uso frequente la *funzione di Cressman*:

$$W(d_{ij}) = \begin{cases} \frac{R^2 - d_{ij}^2}{R^2 + d_{ij}^2} & \text{per } d_{ij}^2 < R^2 \\ 0 & \text{per } d_{ij}^2 \geq R^2 \end{cases}$$

e la *funzione di Barnes* (v. fig. 516):

$$W(d_{ij}) = \frac{1}{4k} \exp(-d_{ij}^2/4k)$$

dove k è scelto tenendo conto della scala orizzontale dei fenomeni e della densità delle postazioni di misura.

5.12. – I simulatori per l'inquinamento atmosferico

Al solo scopo di fornire un esempio di riferimento, in fig. 5.17 sono schematizzati per classi i modelli in uso nella descrizione dei processi atmosferici che riguardano sia la dinamica delle masse d'aria sia l'evoluzione della loro qualità. Naturalmente, una classificazione del tutto analoga, anche se con qualche termine modificato, si ha per l'idrologia e per l'oceanografia (ovvero per le altre matrici fluide del pianeta).

Spesso diversa è, invece, la rappresentazione dei processi che riguardano la matrice solida della Terra.

Nella fig. 5.17 sono distinte tre categorie di modelli: una che comprende i modelli empirici, una per i modelli stocastici ed una che riguarda i modelli quali risultano da formulazioni deterministiche a varia scala.

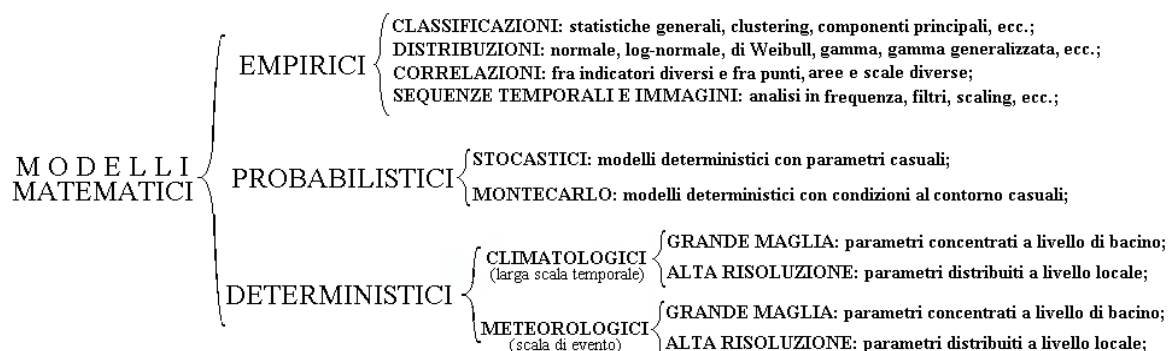


Fig. 5.17 – Classificazione dei modelli matematici per la dinamica dell'atmosfera.

I modelli empirici sono quelli che usano la matematica ma non poggiano su alcuna teoria e mirano solo a rappresentare il passato o a predire il futuro tramite interpolazioni ed estrapolazioni puramente matematiche e statistiche. Alcuni usano aggregare i dati descrivendoli tramite valori medi ed indici di variazione, altri valutano i mutui rapporti fra indicatori diversi altri ancora si riferiscono allo studio di sequenze ordinate di misure (generalmente ordinate rispetto al tempo (serie temporali) o a coordinate spaziali (immagini)).

I modelli probabilistici cercano in qualche modo di considerare i termini fluttuanti sempre presenti nei dati sperimentali. In generale si tratta di modelli deterministici nei quali si introducono termini fluttuanti modificando casualmente i parametri del modello o le condizioni al contorno e/o iniziali.

I modelli deterministici sono costituiti da formulazioni che rappresentano i comportamenti concettualizzati dei sistemi naturali considerati a scale diverse. Alcuni modelli deterministici possono presentare comportamenti apparentemente fluttuanti (modelli o sistemi caotici) in

conseguenza di elevata sensibilità alle condizioni iniziali. In natura questi sistemi tendono a stabilizzare i propri comportamenti per la presenza di processi dissipativi (attriti di vario genere ed irreversibilità). Nello spazio delle fasi ciò si manifesta con visibili convergenze delle diverse traiettorie verso uno o più “*attrattori*”⁽¹⁶⁾.

Con lo schema di fig. 5.17 si è inteso mettere in luce la molteplicità (in termini di varietà e di prestazioni) dei simulatori approntati in meno di 40 anni e la grande vivacità del settore, alimentata soprattutto dallo sviluppo dei PC hanno migliorato le capacità operative aumentando le prestazioni e riducendo i costi.

- APPENDICE - Lo **IUH** DI NASH

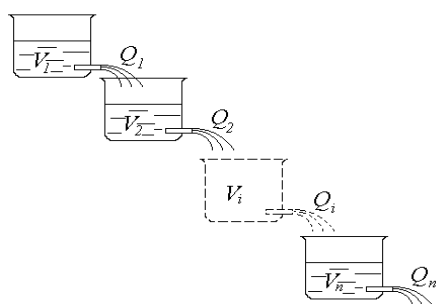


Fig. 5.18 - Schema di Nash.

Lo *IUH* di Nash si costruisce considerando n serbatoi in cascata che scaricano con una portata proporzionale alla quantità d'acqua invasata (v. fig. 5.18):

$$Q_j(t) = K V_j(t),$$

In queste condizioni il bilancio dell'acqua fornisce il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = -Q_1 = -KV_1 \\ \frac{dV_2}{dt} = Q_1 - Q_2 = KV_1 - KV_2 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dV_j}{dt} = Q_{j-1} - Q_j = KV_{j-1} - KV_j \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dV_n}{dt} = Q_{n-1} - Q_n = KV_{n-1} - KV_n \end{cases} ;$$

ed immaginando che il primo serbatoio venga alimentato all'istante $t=0$ con un volume V_o di acqua ($Q_o = V_o \delta(t)$ con $\delta(t)$ «[funzione impulsiva di Dirac](#)»), la portata in uscita dall'ultimo serbatoio è:

$$Q_n(t) = \frac{KV_o}{\Gamma(n)} (Kt)^{n-1} e^{-Kt}$$

ovvero:

$$V_n(t) = \frac{V_o}{\Gamma(n)} (Kt)^{n-1} e^{-Kt}$$

essendo $\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$, funzione per la quale valgono le proprietà $\Gamma(z+1)=\Gamma(z)$ e, per n intero, è $\Gamma(n)=(n-1)!$.

Infatti⁽¹⁷⁾:

$$\frac{d}{dt} V_j(t) = \frac{V_o}{\Gamma(j)} \frac{d}{dt} \left\{ (Kt)^{j-1} e^{-Kt} \right\} =$$

⁽¹⁶⁾ per un approfondimento si veda: <http://www.sci.unich.it/~aroli/dida/iasc/articoli/caos.pdf>

⁽¹⁷⁾ Si applica il metodo della «*induzione completa*» secondo il quale una relazione ricorrente assunta vera per un generico valore dell'indice ricorrente j e dimostrata vera per $j+1$ e anche per $j=1$, è vera per qualsiasi j .

$$\begin{aligned}
&= \frac{V_o}{\Gamma(j)} \left[e^{-Kt} \frac{d}{dt} \left\{ (Kt)^{j-1} \right\} + \left\{ (Kt)^{j-1} \right\} \frac{de^{-Kt}}{dt} \right] = \\
&= \frac{V_o}{\Gamma(n)} \left[e^{-Kt} (n-1) K (Kt)^{n-2} - K \left\{ (Kt)^{n-1} \right\} e^{-Kt} \right] = \\
&= K \frac{V_o}{\Gamma(n-1)} e^{-Kt} (Kt)^{n-2} - K \frac{V_o}{\Gamma(n)} \left\{ (Kt)^{n-1} \right\} e^{-Kt} = \\
&= Q_{n-1} - Q_n
\end{aligned}$$

e sono soddisfatte le condizioni iniziali $V_j(0)=0$.

Inoltre vale per $j=1$ perché $dV_1/dt = KV_1$ ha la soluzione $V_1 = V_0 e^{-Kt}$.

La forma ricorrente si induce ricordando che l'integrale generale di una equazione differenziale del primo ordine ($y' + Ay = B$) è:

$$y = e^{-\int A dx} \left\{ \int e^{\int A dx} B dx + cost \right\}$$

quindi dalla seconda equazione del sistema:

$$\frac{dV_2}{dt} + KV_2 = KV_1 = KV_0 e^{-Kt}$$

che è appunto un'equazione del primo ordine alla quale è possibile applicare la formula risolutiva, si ottiene:

$$\begin{aligned}
V_2(t) &= e^{-Kt} \left\{ \int e^{Kt} KV_0 e^{-Kt} dt + cost_2 \right\} = e^{-Kt} \left\{ \int e^{Kt} KV_0 e^{-Kt} dt + cost_2 \right\} = \\
&= e^{-Kt} \{ V_0(Kt) + cost_2 \} = e^{-Kt} V_0(Kt) + e^{-Kt} \times cost_2.
\end{aligned}$$

Essendo $V_2(0)=0$ è $cost_2 = 0$ e $V_2 = V_0 Kte^{-Kt}$. Iterando il procedimento si ottiene la forma proposta per V_j .

Lo schema di Nash si usa per comporre il deflusso superficiale dei bacini in risposta a *piogge efficaci* (cioè la quota di pioggia che finisce in acque superficiali) qualsiasi attraverso la relazione:

$$Q(t) = S \int_0^t p(\tau) IUH(t-\tau) d\tau$$

dove S è la superficie del bacino.