

1. Introduzione

La comprensione di un fenomeno naturale si conclude con la determinazione di un insieme di equazioni capaci di descrivere la dinamica del sistema. A tale risultato si perviene generalmente attraverso una serie di azioni quali: l'identificazione del fenomeno; una serie di esperimenti finalizzati alla raccolta dei dati; un numero adeguato di simulazioni; analisi statistiche dei dati sperimentali e simulati. Spesso, soprattutto nel caso dei sistemi ambientali, l'analisi dei dati fa sorgere la questione se ci sia una qualche dinamica deterministica che governa il fenomeno oppure se i dati non siano altro che numeri generati da un sistema stocastico senza alcuna struttura sottostante. In effetti in un universo macroscopico retto *comunque* da leggi deterministiche, un sistema stocastico è un sistema con un numero così grande di gradi di libertà e il cui comportamento è determinato da un così elevato numero di equazioni che risulta impossibile darne una formulazione matematica anche approssimativa. Un tale sistema può essere descritto solo con metodi statistici. Viceversa, nel caso di un sistema a basso numero di gradi di libertà è possibile, almeno in linea di principio, ricavare le equazioni della dinamica, e ottenere così una comprensione accurata del fenomeno.

Dal punto di vista dell'osservatore, un processo può essere considerato come una scatola nera contenente un sistema dinamico continuo che si manifesta attraverso la misura di una sua variabile effettuata ad intervalli di tempo discreti. Nel caso di

1. Introduzione

misurazioni regolari il *segnale* da interpretare è una *serie temporale* di dati ottenuti campionando il sistema ad intervalli di tempo τ :

$$s(n) = s(t_0 + n\tau), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.1)$$

A prima vista, la discriminazione tra il segnale generato da un sistema stocastico e quello generato da un sistema dinamico a pochi gradi di libertà non sembra un problema difficile: un semplice esame del segnale stesso o al massimo un'analisi statistica classica dovrebbero consentire di distinguere i due casi. In realtà utilizzando strumenti convenzionali lineari quali ad esempio l'analisi di Fourier, tale discriminazione risulta spesso quanto meno problematica.

Si considerino ad esempio le serie temporali di Figura 1.1, ciascuna con il relativo spettro di potenza: i due segnali sembrano entrambi casuali e non dotati di

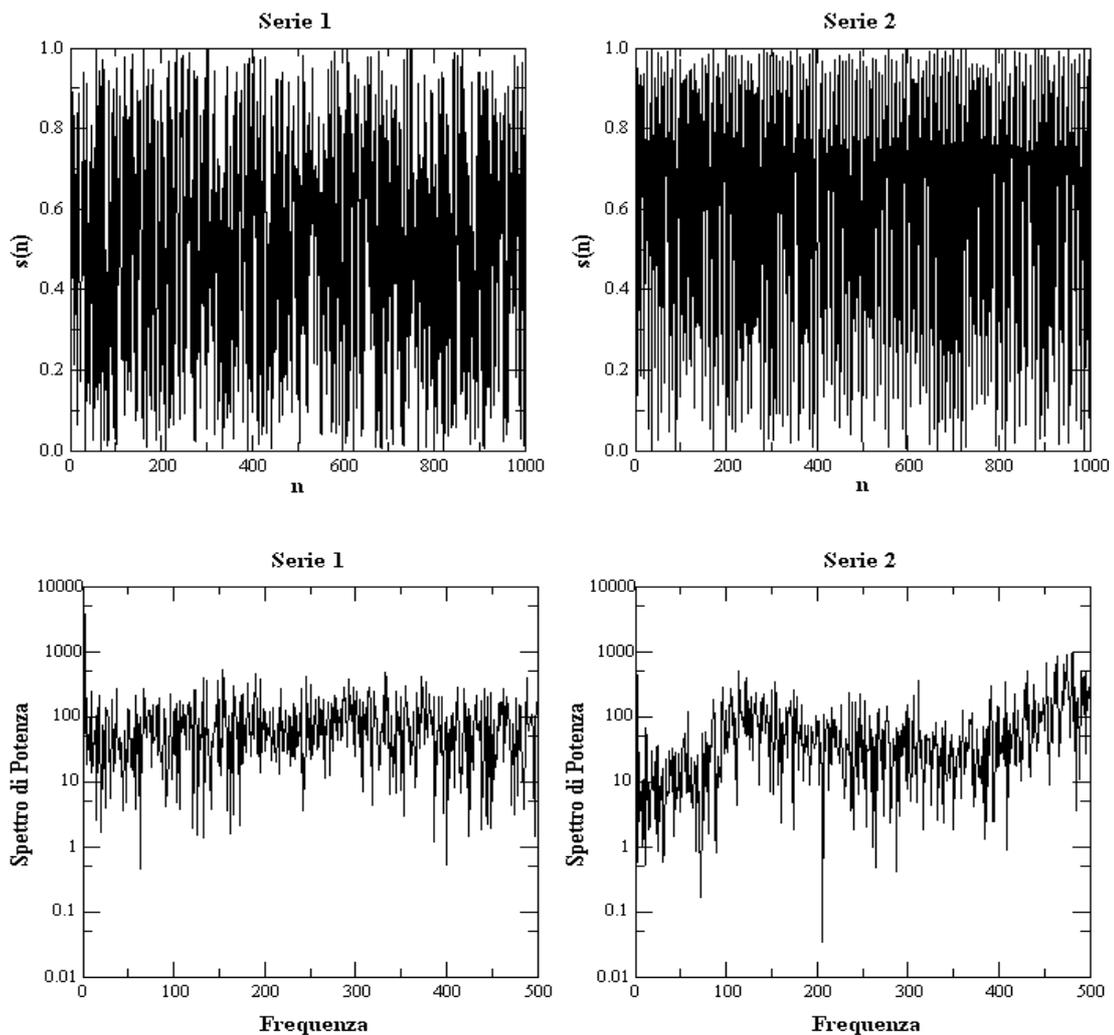


FIGURA 1.1 Due serie temporali (in alto) ed i relativi spettri di potenza (in basso).

1. Introduzione

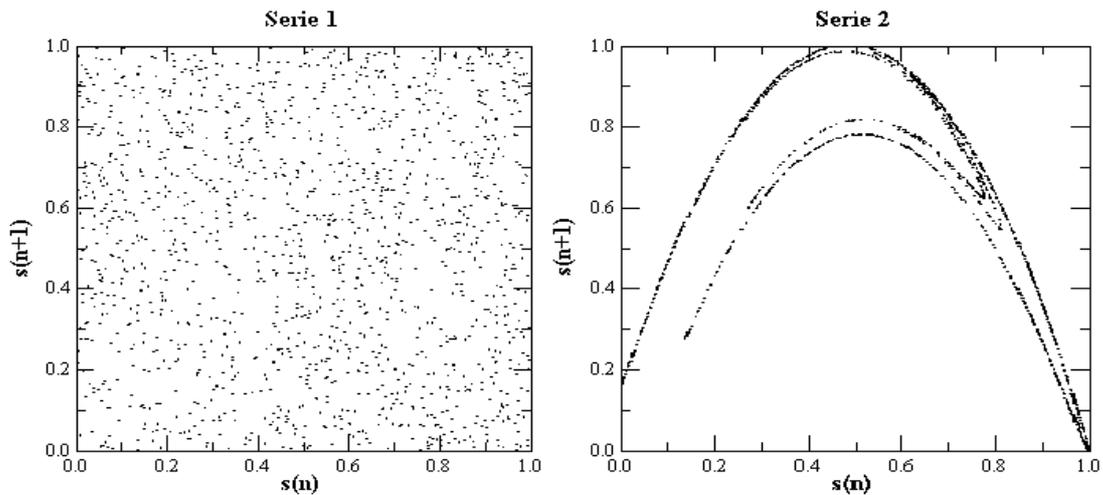


FIGURA 1.2 $s(n+1)$ in funzione di $s(n)$ per le due serie di Figura 1.1.

una qualche frequenza caratteristica. Se si rappresenta però il dato $s(n+1)$ in funzione di $s(n)$ (Figura 1.2), emerge una differenza significativa: nel secondo caso è chiaramente presente una struttura ad indicare che il segnale non è prodotto da un processo stocastico.

1.1 Il piano della tesi

Nel presente capitolo vengono introdotti i sistemi caotici e le loro principali caratteristiche; segue poi una breve discussione sul caos dell'atmosfera.

Il secondo capitolo verte sull'analisi dei sistemi caotici con particolare riferimento alla ricostruzione dello spazio delle fasi.

Nel terzo capitolo saranno discussi gli invarianti della dinamica caotica con particolare riguardo per la dimensione frattale dell'attrattore e per gli esponenti di Lyapunov.

Nel quarto capitolo verrà descritta la serie storica di temperature registrate a Udine, gentilmente fornita dal prof. Mario Ceschia dell'Università di Udine, e utilizzata nel presente lavoro; verranno inoltre illustrate le tecniche di *denoising* della serie.

Nel quinto capitolo l'applicazione delle le tecniche di analisi caotica consentirà di dimostrare che la serie storica in esame è generata da un sistema caotico

1.2 Sistemi caotici

a basso numero di gradi di libertà. Tale conclusione è accompagnata ed avvalorata da un modello concettualmente molto semplice che, basandosi sulla struttura dell'attrattore del sistema, è in grado di effettuare delle buone previsioni della variabile considerata.

1.2 Sistemi caotici

Con il termine *caos* viene indicata una classe di segnali che hanno un comportamento intermedio tra un andamento regolare, periodico o quasiperiodico, ed un andamento stocastico e del tutto imprevedibile.

In generale, l'evoluzione di un sistema caotico è determinata da un sistema di equazioni differenziali non lineari:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \quad (1.2)$$

con tre o più gradi di libertà o da una mappa discreta invertibile:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \quad (1.3)$$

con due o più gradi di libertà (Thompson and Stewart, 1986)⁽¹⁾. Il numero di gradi di libertà è rappresentato dal numero di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine necessarie a descrivere l'evoluzione in un sistema continuo ovvero dal numero di componenti del vettore di stato $\mathbf{x}(t)$. Le orbite descritte dal punto $\mathbf{x}(t)$ di un sistema caotico sono caratterizzate da un'elevata complessità, dall'assenza di periodicità e dalla dipendenza sensibile (esponenziale) dalle condizioni iniziali. Al crescere di t tali orbite tendono ad occupare un sottoinsieme dello spazio delle fasi detto *attrattore*.

A differenza dei sistemi regolari, per i quali l'attrattore è un punto fisso, un'orbita periodica (ciclo limite) o un'orbita quasi-periodica (toro) e la cui dimensione è un numero intero, nel caso di un sistema caotico si parla di *attrattore*

¹ In effetti la funzione logistica (cfr. par. 1.2.1.) è un sistema caotico la cui evoluzione è descritta da una mappa discreta monodimensionale.

1. Introduzione

strano in quanto caratterizzato da una dimensione non intera (oggetto frattale) e dal fatto che traiettorie passanti da punti anche molto vicini finiscono per divergere.

1.2.1 La funzione logistica

Un sistema dinamico può avere comportamenti regolari per particolari valori dei parametri delle equazioni che lo descrivono e comportamenti caotici per altri. Un tipico esempio è quello della funzione logistica o iteratore quadratico:

$$x_{k+1} = rx_k(1 - x_k) \quad (1.4)$$

la cui origine risale ad un modello di dinamica della popolazione dovuto al matematico belga Pierre François Verhulst.

Se si rappresenta in funzione del parametro (che rappresenta il tasso di crescita della popolazione) l'evoluzione asintotica del sistema, x_∞ , si vede come, al crescere di r , il sistema compia una transizione da stabile, con uno o più punti fissi, a caotico (Figura 1.3).

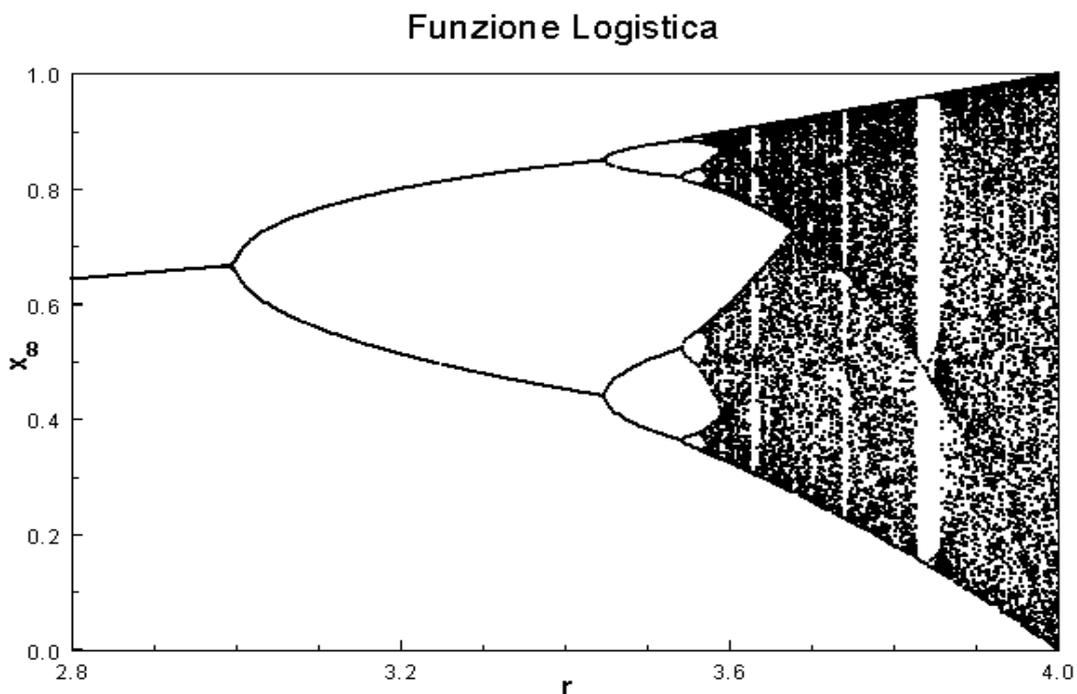


FIGURA 1.3 Diagramma dell'evoluzione asintotica della funzione logistica per valori del parametro compresi tra 2.8 e 4. Il valore iniziale è $x_0 = 0.8$.

1.2.2. Il sistema di Lorenz

Un celebre esempio di sistema caotico è il modello derivato da Lorenz nel 1963 per approssimare la convezione termica nella bassa atmosfera:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -xz + Rx - y \\ \dot{z} = xy - Bz \end{cases} \quad (1.5)$$

ove le grandezze σ , B e R sono i parametri del sistema che Lorenz nei suoi studi originali aveva fissato ai valori:

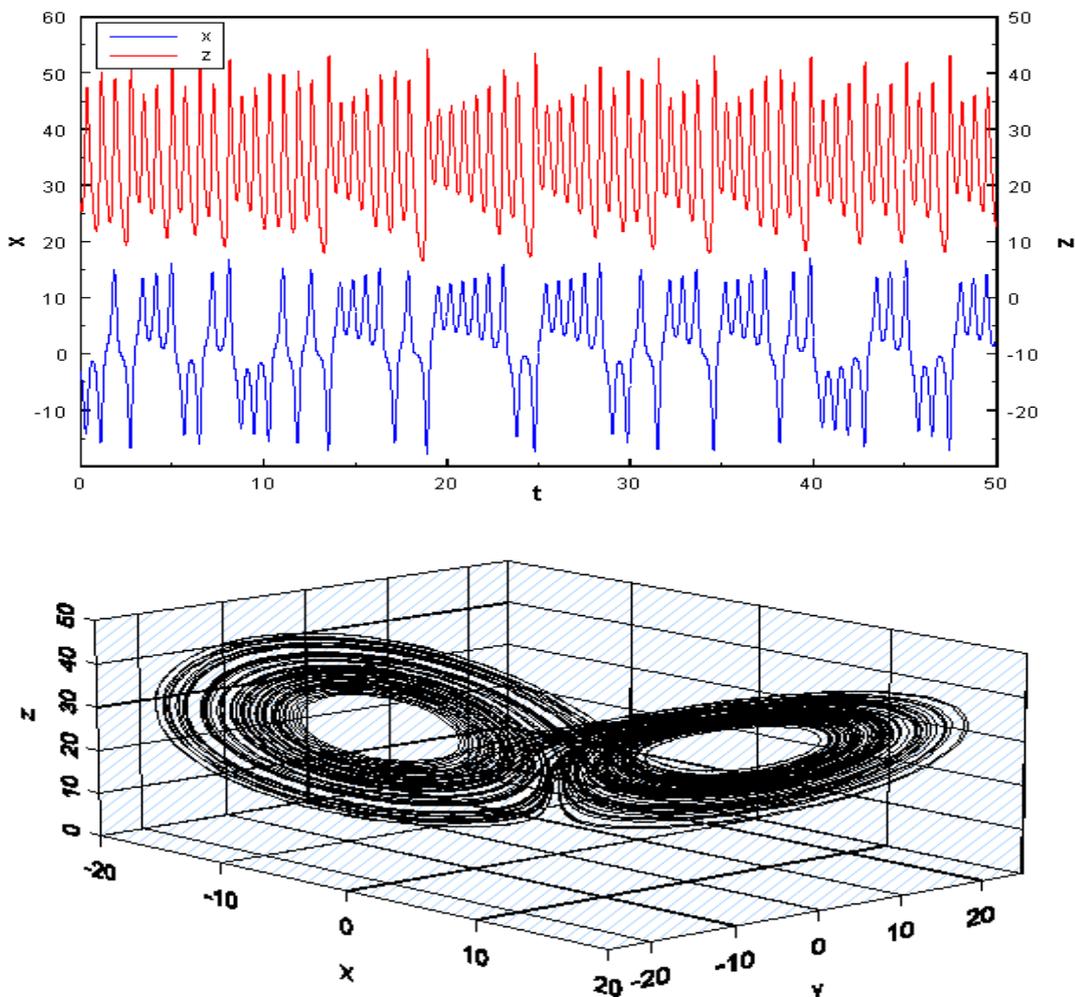


FIGURA 1.4 Serie di valori delle variabili x e z (in alto) e attrattore del sistema di Lorenz (in basso). I valori dei parametri sono quelli fissati in origine da Lorenz: $\sigma = 10$, $B = 8/3$ e $R = 28$; il passo d'integrazione è: $\tau = 0.005$.

1. Introduzione

$$\sigma = 10, \quad B = \frac{8}{3}, \quad R = 28.$$

Le serie di valori delle variabili x e z e l'attrattore del sistema di Lorenz sono rappresentati in Figura 1.4.

Anche nel caso del sistema di Lorenz, per opportuni valori dei parametri le equazioni possono ammettere soluzioni stabili come mostra la Figura 1.5 dove sono rappresentate le serie di valori delle variabili x e z (in alto) e il ciclo limite del sistema (in basso) che corrispondono alla soluzione stabile che si ottiene quando i parametri σ , B ed R valgono rispettivamente 10, $8/3$ e 100.

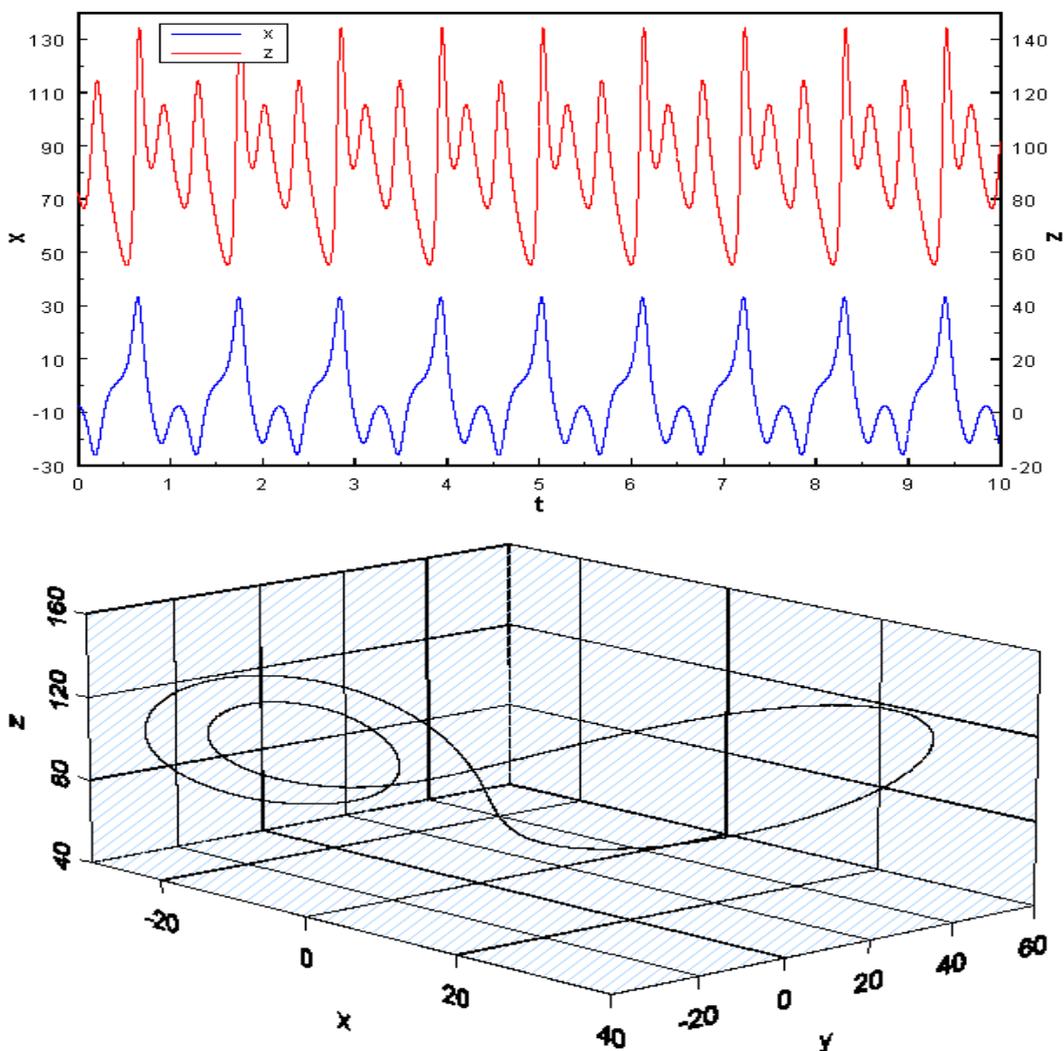


FIGURA 1.5 Serie di valori delle variabili x e z (in alto) e ciclo limite del sistema di Lorenz (in basso). I valori dei parametri sono: $\sigma = 10$, $B = 8/3$ e $R = 100.795$; il passo d'integrazione è: $\tau = 0.005$.

1.2.3. Il sistema di Hénon

Nel 1976 l'astronomo francese Michel Hénon propose un modello semplificato della dinamica del sistema di Lorenz, definito dalla seguente mappa discreta bidimensionale (Hénon, 1976):

$$\begin{cases} x_{k+1} = -ax_k^2 + y_k + 1 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}, \quad k = 0,1,2,\dots \quad (1.6)$$

ove i valori dei parametri scelti da Hénon sono:

$$a = 1.4 \quad \text{e} \quad b = 0.3$$

L'attrattore del sistema di Hénon è rappresentato in Figura 1.6.

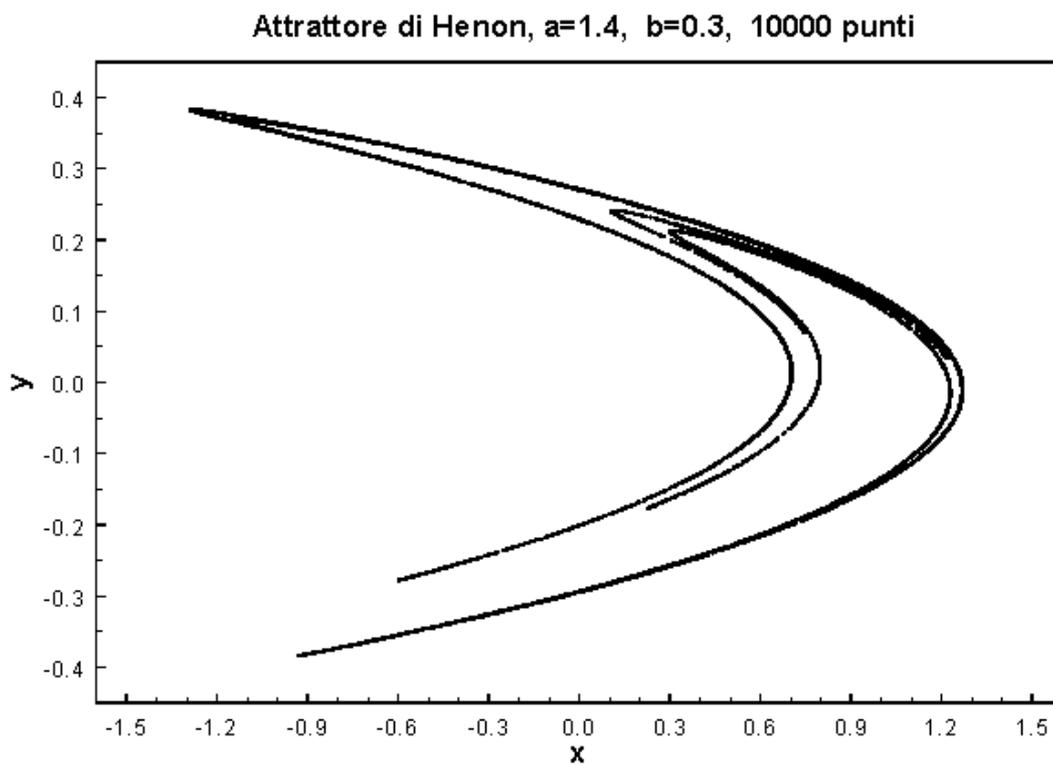


FIGURA 1.6 Attrattore del sistema di Hénon (1.6).

1.2.4 Imprevedibilità dei sistemi caotici

Una caratteristica dei sistemi caotici è l'imprevedibilità derivante dal fatto che traiettorie passanti per punti anche molto vicini finiscono per divergere.

In un sistema caotico la distanza tra le orbite passanti per due punti dello spazio delle fasi arbitrariamente vicini aumenta esponenzialmente col tempo fino a divenire confrontabile con l'ampiezza dell'attrattore stesso, dopodiché le due orbite sono completamente scorrelate e la loro distanza assume un andamento casuale. Tale fenomeno è noto anche come *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali*. La Figura 1.7 mostra l'evoluzione nel tempo della distanza tra due punti inizialmente molto vicini della funzione logistica (1.4).

Come vedremo più avanti, la divergenza media delle traiettorie, e quindi l'imprevedibilità di un sistema, può essere quantificata mediante gli esponenti di Lyapunov.

Un'altra grandezza che caratterizza un sistema caotico è la *dimensione frattale* del suo attrattore. La relazione che esprime come un (iper) volume scala in

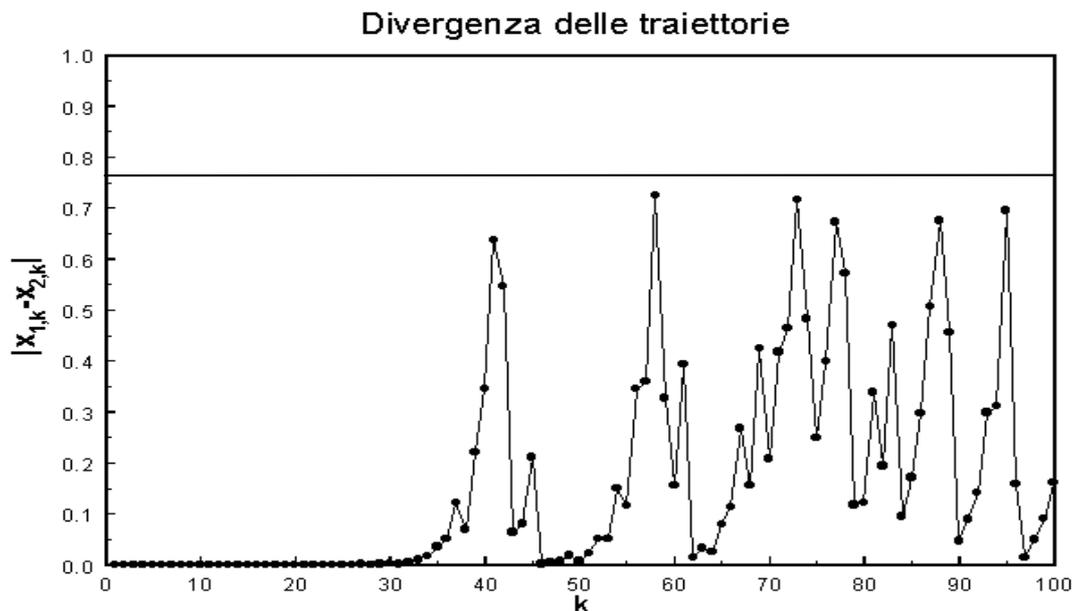


FIGURA 1.7 Evoluzione della distanza tra i punti $x_{1,0} = 0.1$ e $x_{2,0} = 0.10000001$ della funzione logistica (1.4). Il parametro r vale 3.8; in corrispondenza di tale valore l'attrattore è l'intervallo di estremi 0.18 e 0.95, la cui ampiezza, pari a 0.77, è rappresentata dalla linea orizzontale.

1.3 Il caos dell'atmosfera

funzione della lunghezza:

$$V \propto L^D$$

può essere invertita per “definire” la dimensione:

$$D = \frac{\log V}{\log L}. \quad (1.7)$$

Vedremo in seguito come da una generalizzazione della nozione di volume nella (1.7) derivino le diverse definizioni di dimensione frattale ed i relativi metodi per ottenere una stima numerica di tali grandezze.

1.3 Il caos dell'atmosfera

Se l'atmosfera sia un sistema caotico è una questione che è stata a lungo dibattuta. Tale dibattito inizia nel 1963 con la pubblicazione dell'ormai famoso modello di Lorenz che viene spesso menzionato come il primo esempio di sistema caotico.

Un lavoro di Nicolis pubblicato su *Nature* (Nicolis, 1984) pone la questione dell'esistenza o meno di un attrattore per il clima del passato: applicando l'algoritmo di Grassberger-Procaccia⁽²⁾ ad una serie temporale di circa 500 punti, egli trova una dimensione dell'attrattore strano pari a 3.1.

Il risultato di Nicolis fu tuttavia immediatamente contestato dallo stesso Grassberger, il quale utilizzando 7000 punti stabilì che la dimensione era maggiore di 10.

Il dibattito continuò negli anni successivi (Grassberger, 1986; Nicolis, 1987; Essex, 1987; Tsonis, 1988)

Tra gli articoli più interessanti sull'argomento, ricordiamo quello di Zeng et al. (1991), relativo all'analisi per mezzo degli esponenti di Lyapunov di serie di temperature in due località degli Stati Uniti al fine di valutare quantitativamente la prevedibilità di tali grandezze. Dallo studio emerge in particolare che le serie delle

² Cfr. par. 3.2.

1. Introduzione

temperature hanno due esponenti di Lyapunov positivi, pertanto l'atmosfera ha un attrattore caotico con un tempo di raddoppio dell'errore di circa 3.7 giorni in una delle due località considerate (Los Angeles) dove il rapporto segnale/rumore è alto, e di circa 2.5 giorni a Fort Collins (l'altra località esaminata) dove il rapporto segnale/rumore è più basso.

Si rimanda infine ai riferimenti bibliografici per un elenco dei principali articoli che si trovano in letteratura sull'argomento.