

2. Analisi di un sistema caotico

2.1 Ricostruzione dello spazio delle fasi

Il primo problema da risolvere nell'analisi di un sistema caotico è la ricostruzione dello spazio delle fasi a partire da un segnale monodimensionale. La risposta a questo problema è fornita dal seguente teorema di *embedding* (Mañé et al., 1981; Takens, 1981):

“Data la grandezza scalare h funzione di una grandezza vettoriale \mathbf{g} a sua volta funzione delle variabili di stato \mathbf{x} :

$$h = h(\mathbf{g}(\mathbf{x}(n))), \quad (2.1)$$

lo spazio composto dai vettori \mathbf{y} le cui componenti sono date da h applicata a potenze di $\mathbf{g}(\mathbf{x}(n))$ ⁽³⁾:

$$\mathbf{y}(n) = [h(\mathbf{x}(n)), h(\mathbf{g}^{T_1}(\mathbf{x}(n))), h(\mathbf{g}^{T_2}(\mathbf{x}(n))), \dots, h(\mathbf{g}^{T_{d-1}}(\mathbf{x}(n)))] \quad (2.2)$$

³ Si indica come potenza T di una funzione \mathbf{g} la applicazione ripetuta T volte della funzione stessa: $\mathbf{g}^T(x) = \mathbf{g}(\mathbf{g}(\dots(\mathbf{g}(x))\dots))$, cosicché $\mathbf{g}^0(x) = x$, $\mathbf{g}^1(x) = \mathbf{g}(x)$, $\mathbf{g}^2(x) = \mathbf{g}(\mathbf{g}(x))$, ...

2. Analisi di un sistema caotico

è tale da riprodurre senza ambiguità le proprietà del segnale multivariato incognito $\mathbf{x}(n)$ ”.

In particolare l'evoluzione nel tempo dei punti \mathbf{y} segue quella della dinamica incognita \mathbf{x} nel senso che il comportamento deterministico della dinamica \mathbf{x} assicura il comportamento deterministico della dinamica sostitutiva \mathbf{y} (Abarbanel, 1995).

Se la funzione h rappresenta la serie dei valori osservati: $h(\mathbf{x}(n)) = s(n)$ e se la funzione $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ trasla in avanti il vettore \mathbf{x} di un tempo pari a quello di campionamento τ : $\mathbf{g}(\mathbf{x}(n)) = \mathbf{x}(n + \tau)$, allora la (2.2) diviene:

$$\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n + \tau T_1), s(n + \tau T_2), \dots, s(n + \tau T_{d-1})] \quad (2.3)$$

posto inoltre $\tau T_k = kT$, si ha:

$$\mathbf{y}(n) = [s(n), s(n + T), s(n + 2T), \dots, s(n + (d - 1)T)]. \quad (2.4)$$

Fissati il *time delay* T e la dimensione di *embedding* d , i vettori $\mathbf{y}(n)$ rappresentano un sostituto dei vettori di stato $\mathbf{x}(t)$ del sistema dinamico originale. Tale rappresentazione è “fedele” nel senso che conserva gli invarianti della dinamica originale senza perdita di informazioni. È quindi di fondamentale importanza poter disporre di un criterio – o quanto meno, di una prassi – che consenta di determinare il *time delay* e la dimensione di *embedding*.

2.2 Time delay

Il teorema di *embedding* non pone restrizioni sul *time delay* che, in linea di principio, può assumere un valore qualsiasi. Tale grandezza deve comunque, quanto meno, soddisfare alcuni requisiti:

- 1) poiché si suppone che il segnale sia campionato con periodo τ , il *time delay* T dovrà essere un multiplo di τ ;
- 2) il *time delay* non deve essere troppo breve affinché le componenti del vettore $\mathbf{y}(n)$ siano sufficientemente indipendenti. Infatti, se T fosse molto piccolo

2.2 Time delay

rispetto alla scala temporale della dinamica osservata, le componenti $s(n)$ ed $s(n+T)$ conterrebbero sostanzialmente la stessa informazione;

- 3) il *time delay* non deve essere troppo lungo affinché le componenti del vettore $\mathbf{y}(n)$ non siano del tutto indipendenti. A causa della divergenza esponenziale delle traiettorie di un sistema caotico, se T fosse molto grande rispetto alla scala temporale della dinamica osservata, le componenti $s(n)$ ed $s(n+T)$ sarebbero random una rispetto all'altra;

Sulla base di questi requisiti, diversi criteri sono stati individuati per determinare il valore ottimale del *time delay* e, sebbene non ne esista uno universalmente accettato (Rosenstein et al., 1994), due sono i metodi più diffusi in letteratura – per un terzo criterio di determinazione del *time delay* si veda ad es. (Venkadesan et al., 1996).

Il primo criterio è basato sulla funzione di autocorrelazione lineare:

$$C_L(T) = \frac{\frac{1}{N} \sum_n [s(n+T) - \bar{s}][s(n) - \bar{s}]}{\frac{1}{N} \sum_n [s(n) - \bar{s}]^2} \quad (2.5)$$

dove

$$\bar{s} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s(n).$$

In base a questo criterio, il *time delay* ottimale è quello in corrispondenza del quale la funzione di autocorrelazione lineare (2.5) ha il primo zero (Abarbanel et al., 1993), oppure si riduce di un fattore pari a $1/e$ (*e-fold time*) (Rosenstein et al., 1993).

Tale scelta è stata però oggetto di critica (Abarbanel, 1995) proprio perché basata sull'uso dell'autocorrelazione lineare giudicato improprio nel caso di sistemi non lineari quali quelli caotici.

Un altro criterio per la determinazione di T (Fraser and Swinney, 1986) è basato sul concetto di *mutua informazione* tra la misura a_i appartenente all'insieme $A = \{a_i\}$ e la misura b_j appartenente all'insieme $B = \{b_j\}$:

2. Analisi di un sistema caotico

$$MI(a_i, b_j) = \log_2 \left[\frac{P_{AB}(a_i, b_j)}{P_A(a_i)P_B(b_j)} \right] \quad (2.6)$$

dove $P_{AB}(a, b)$ è la densità di probabilità congiunta che le misure di A e B diano per risultato a e b rispettivamente; $P_A(a)$ e $P_B(b)$ sono le densità di probabilità che la misura di A dia a e quella di B dia b . Se il risultato a_i , ottenuto misurando A , è del tutto indipendente dal fatto che si sia ottenuto b_j misurando B , allora $P_{AB}(a_i, b_j) = P_A(a_i)P_B(b_j)$ e la mutua informazione è zero. La *mutua informazione media* tra le misure di A e quelle di B è data da:

$$I_{AB} = \sum_{a_i, b_j} P_{AB}(a_i, b_j) MI(a_i, b_j). \quad (2.7)$$

Se si pone: $a_i = s(n)$ e $b_j = s(n+T)$, la (2.7) diviene:

$$I(T) = \sum_{s(n), s(n+T)} P(s(n), s(n+T)) \log_2 \left[\frac{P(s(n), s(n+T))}{P(s(n))P(s(n+T))} \right] \quad (2.8)$$

La (2.8) dà la misura della mutua informazione media tra le misure di $s(n)$ e quelle di $s(n+T)$. Quando T diviene molto grande la caoticità del sistema fa sì che le misure di $s(n)$ e $s(n+T)$ divengano praticamente indipendenti e $I(T)$ tende a zero.

$I(T)$ assume così il ruolo di una funzione di autocorrelazione non lineare ed il criterio per la scelta del *time delay*, suggerito da (Fraser and Swinney, 1986), è di scegliere T in corrispondenza del primo minimo della mutua informazione media (2.8). In assenza di minimo per $I(T)$ o quando è noto che i dati provengono da una mappa discreta, Abarbanel, Brown, Sidorowich e Tsimring suggeriscono di porre $T = 1$ o 2 (Abarbanel et al., 1993).

Nella Figura 2.1. è rappresentata la funzione di autocorrelazione lineare per la serie dei valori x del sistema di Lorenz (in alto) e del sistema di Hénon (in basso). Nel caso del sistema di Lorenz l'autocorrelazione si riduce di un fattore pari a $1/e$ quando $T = 38$ ed il primo zero si ha quando $T \approx 372$. Nel caso del sistema di Hénon si vede come l'autocorrelazione diventi negativa già con *lag* uguale a 1.

2.2 Time delay

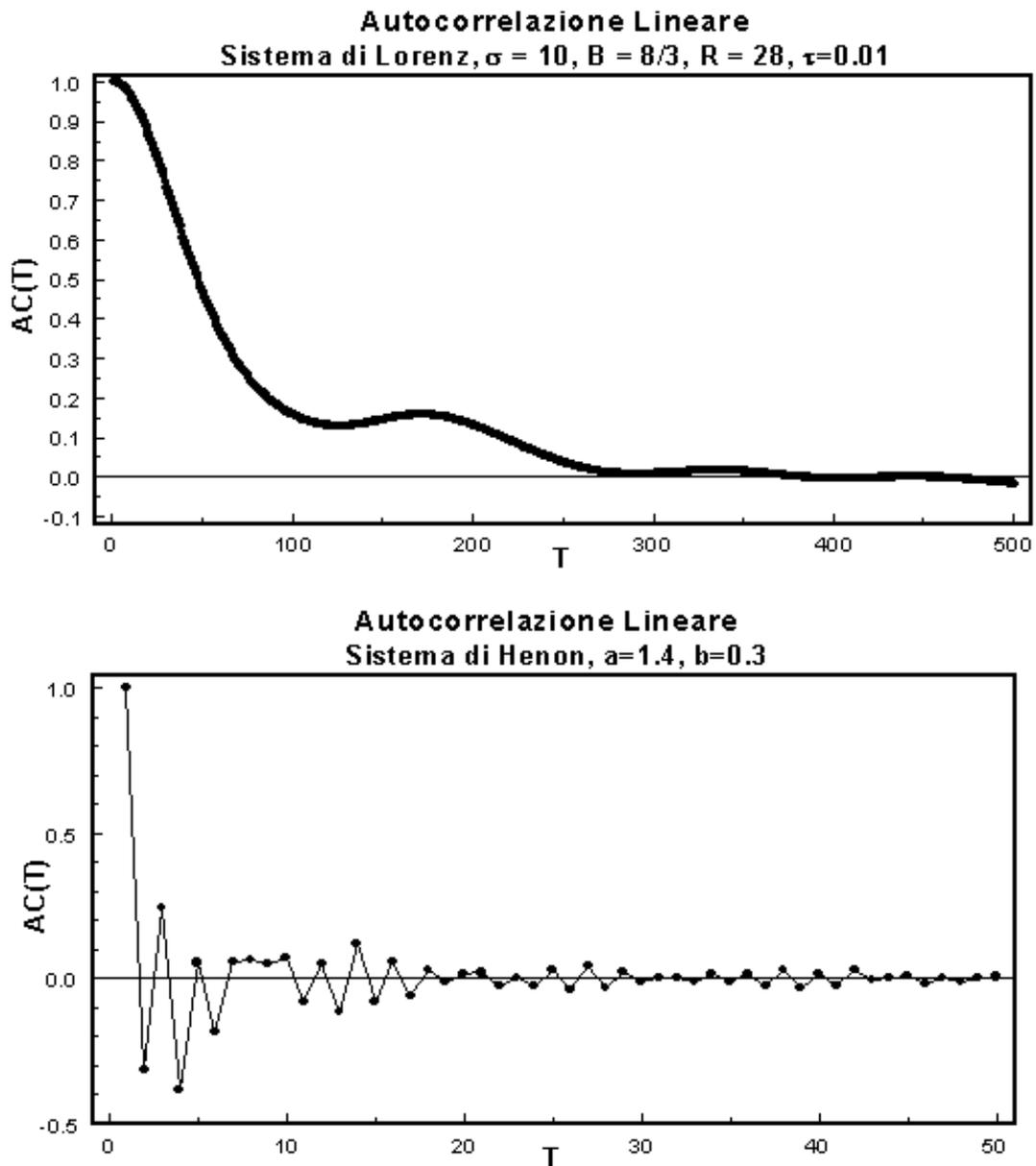


FIGURA 2.1 Autocorrelazione lineare per la serie dei valori x del sistema di Lorenz (in alto) e del sistema di Hénon (in basso).

Nella Figura 2.2 è rappresentata la mutua informazione media calcolata per le stesse serie della Figura 2.1. Per il sistema di Lorenz il primo minimo si ha quando $T = 17$, mentre per il sistema di Hénon la curva non presenta minimo e quindi, in questo caso, la scelta del *time delay* coincide con quella che deriva dall'analisi dell'autocorrelazione: $T = 1$.

2. Analisi di un sistema caotico

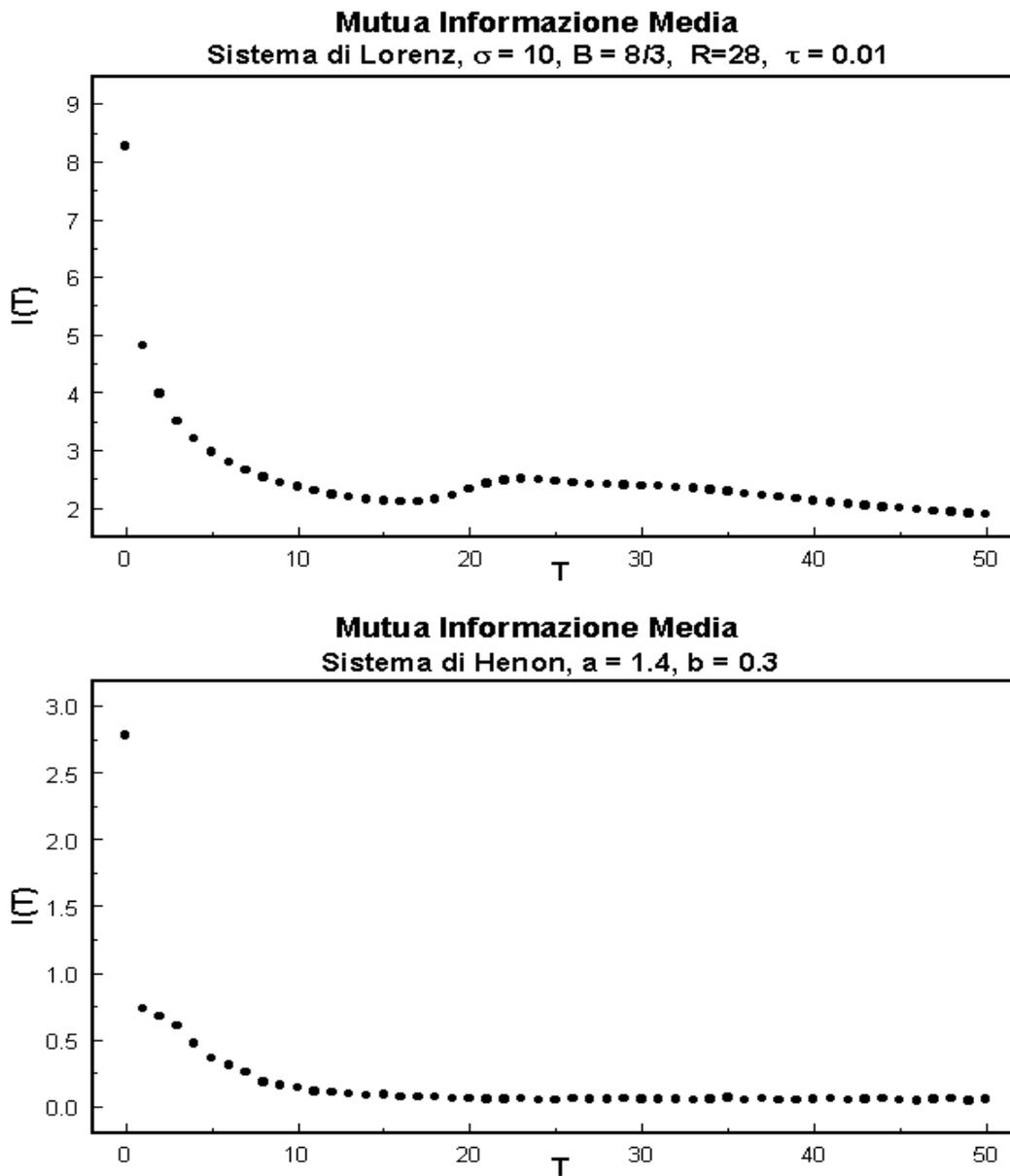


FIGURA 2.2 Mutua informazione media per la serie dei valori x del sistema di Lorenz (in alto) e del sistema di Hénon (in basso).

2.3 Dimensione di Embedding

L'operazione di misurazione corrisponde ad una proiezione sull'asse $s(n)$ di un'orbita del sistema dinamico reale. Ciò avrà come effetto sovrapposizioni dell'orbita che, per il teorema dell'unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali, non esistono nello spazio delle variabili dinamiche; nella Figura 2.3, ad

2.3 Dimensione di Embedding

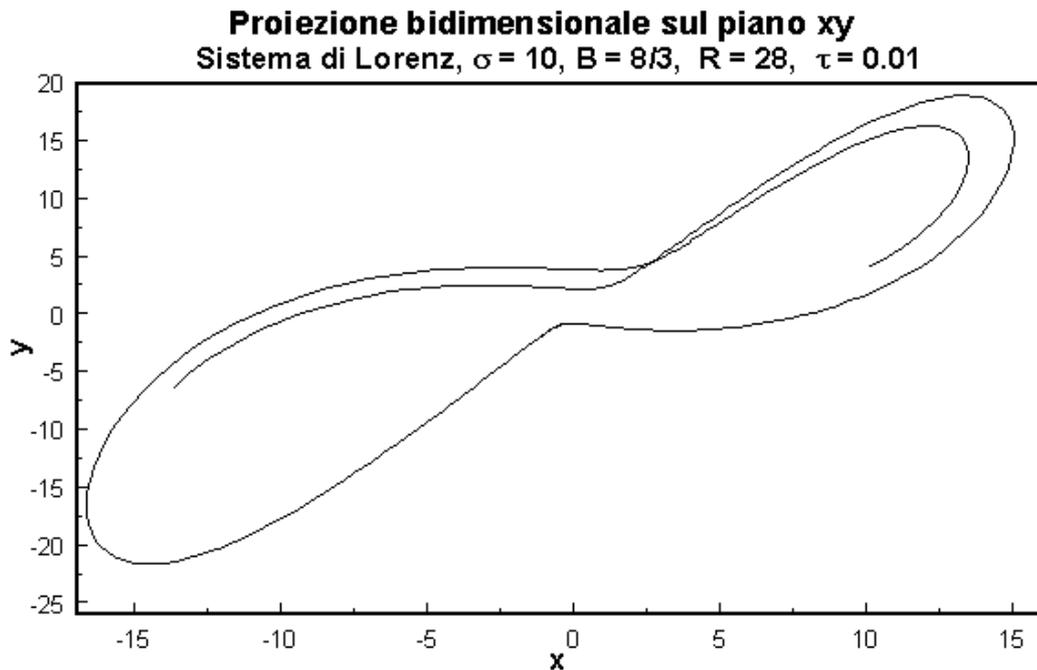


FIGURA 2.3 Proiezione sul piano xy di un'orbita del sistema di Lorenz.

esempio, è rappresentata la proiezione sul piano xy di un'orbita del sistema di Lorenz: come si vede, a causa della proiezione la curva si interseca in un punto. La ricostruzione dello spazio delle fasi fatta correttamente elimina proprio tali sovrapposizioni fittizie.

Se le orbite sono contenute in uno spazio di dimensione d_A , si può dimostrare che la condizione *sufficiente*, affinché la ricostruzione (2.3) elimini tutte le sovrapposizioni, è che sia $d > 2d_A$. D'altro canto la dimensione *necessaria* a ricostruire efficacemente lo spazio delle fasi è spesso minore di quella sufficiente. Inoltre, in generale, la dimensione d_A non è conosciuta a priori.

Le sovrapposizioni fittizie causate dalla proiezione dei vettori di stato in uno spazio a dimensione d , inferiore a quella necessaria per una corretta ricostruzione, fanno sì che un dato punto avrà dei punti vicini che sono tali solo in virtù di tale proiezione ma che potrebbero risultare lontani in uno spazio correttamente ricostruito (falsi vicini).

Per stabilire quando la dimensione di *embedding* scelta è quella necessaria alla corretta ricostruzione si considerano tutti i punti dello spazio ricostruito:

2. Analisi di un sistema caotico

$$\mathbf{y}(k) = [s(k), s(k+T), \dots, s(k+(d-1)T)]$$

ed i relativi primi vicini:

$$\mathbf{y}^{NN}(k) = [s^{NN}(k), s^{NN}(k+T), \dots, s^{NN}(k+(d-1)T)],$$

il quadrato della loro distanza euclidea sarà:

$$R_d(k)^2 = \sum_{m=1}^d [s(k+(m-1)T) - s^{NN}(k+(m-1)T)]^2. \quad (2.9)$$

Nello spazio a dimensione $d+1$ tale distanza diviene:

$$\begin{aligned} R_{d+1}(k)^2 &= \sum_{m=1}^{d+1} [s(k+(m-1)T) - s^{NN}(k+(m-1)T)]^2 \\ &= R_d(k)^2 + |s(k+dT) - s^{NN}(k+dT)|^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Il rapporto tra la distanza dei punti a dimensione $d+1$ e a quella dei punti a dimensione d è dato da:

$$\sqrt{\frac{R_{d+1}(k)^2 - R_d(k)^2}{R_d(k)^2}} = \frac{|s(k+dT) - s^{NN}(k+dT)|}{R_d(k)}. \quad (2.11)$$

Quando tale rapporto supera una soglia prefissata:

$$\frac{|s(k+dT) - s^{NN}(k+dT)|}{R_d(k)} > R_T. \quad (2.12)$$

il punto $\mathbf{y}^{NN}(k)$ viene considerato un falso vicino. Per valori di R_T compresi nell'intervallo $10 \leq R_T \leq 50$, il numero di falsi vicini individuati dalla (2.12) è costante (Abarbanel et al., 1993).

La percentuale di falsi vicini individuati dalla (2.12) diminuirà da un valore iniziale (di solito prossimo al 100%) in corrispondenza di $d=1$, fino a zero quando la corretta dimensione di *embedding* d_E è stata raggiunta; per $d > d_E$ il numero di falsi vicini resterà zero poiché ormai tutte le false sovrapposizioni saranno state eliminate e l'aumentare le dimensioni non ne genera di nuove.

Un difetto intrinseco al metodo è che, se applicato a dati generati da un sistema stocastico, e quindi con un numero di dimensioni molto elevato, esso indica,

2.3 Dimensione di Embedding

per tali dati, una dimensione di *embedding* bassa. Ciò è dovuto al fatto che i dati generati da un sistema stocastico tendono a popolare uniformemente lo spazio a disposizione. Poiché il volume aumenta in ragione della distanza elevata alla dimensione dello spazio, all'aumentare della dimensione di *embedding* i dati (che sono una quantità finita) si allontaneranno sempre di più l'uno dall'altro e quindi due punti primi vicini in realtà possono essere "lontani" e quindi il denominatore della (2.12) aumenta esponenzialmente fino a che, in corrispondenza ad un dato valore \bar{d} , il criterio non è più soddisfatto ed il numero dei falsi vicini scende a zero.

Nella Figura 2.4 è rappresentata la percentuale di falsi vicini per una serie di numeri casuali: è evidente come l'utilizzo del solo criterio (2.12) induce a ritenere, erroneamente, che $\bar{d} = 5$ sia la corretta dimensione di *embedding*.

Per ovviare a questo problema, al criterio (2.12) per determinare un falso vicino occorre aggiungerne un altro: che la distanza aggiunta aumentando la dimensione dello spazio non sia troppo maggiore del "diametro" dell'attrattore. In altri termini se:

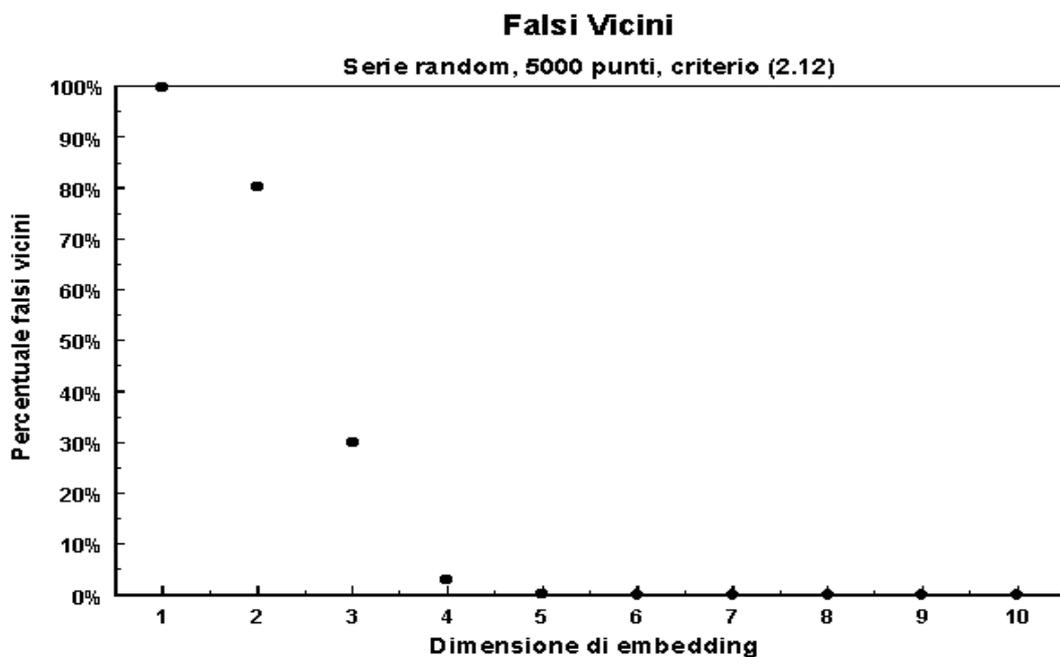


FIGURA 2.4 Percentuale di falsi vicini per una serie di numeri casuali: l'uso del solo criterio (2.12) non è sufficiente a discriminare le serie stocastiche.

2. Analisi di un sistema caotico

$$\frac{|s(k+dT) - s^{NN}(k+dT)|}{R_A} > 2 \quad (2.13)$$

ove il “diametro” dell’attrattore viene stimato come lo scarto quadratico medio dei dati attorno alla media:

$$R_A^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [s(k) - \bar{s}]^2 \quad (2.14)$$

allora il punto $y^{NN}(k)$ viene considerato un falso vicino.

Nella Figura 2.5, relativa alla stessa serie della Figura 2.4, si vede come l’utilizzo di entrambi i criteri consenta di riconoscere la natura stocastica dei dati.

Nella Figura 2.6 è rappresentata la percentuale di falsi vicini, ottenuta utilizzando entrambi i criteri, per la variabile x del sistema di Lorenz (in alto) e per la variabile x del sistema di Hénon (in basso). Il metodo consente di determinare la corretta dimensione di *embedding* in entrambi i casi: $d = 3$ per il sistema di Lorenz e $d = 2$ per quello di Hénon.

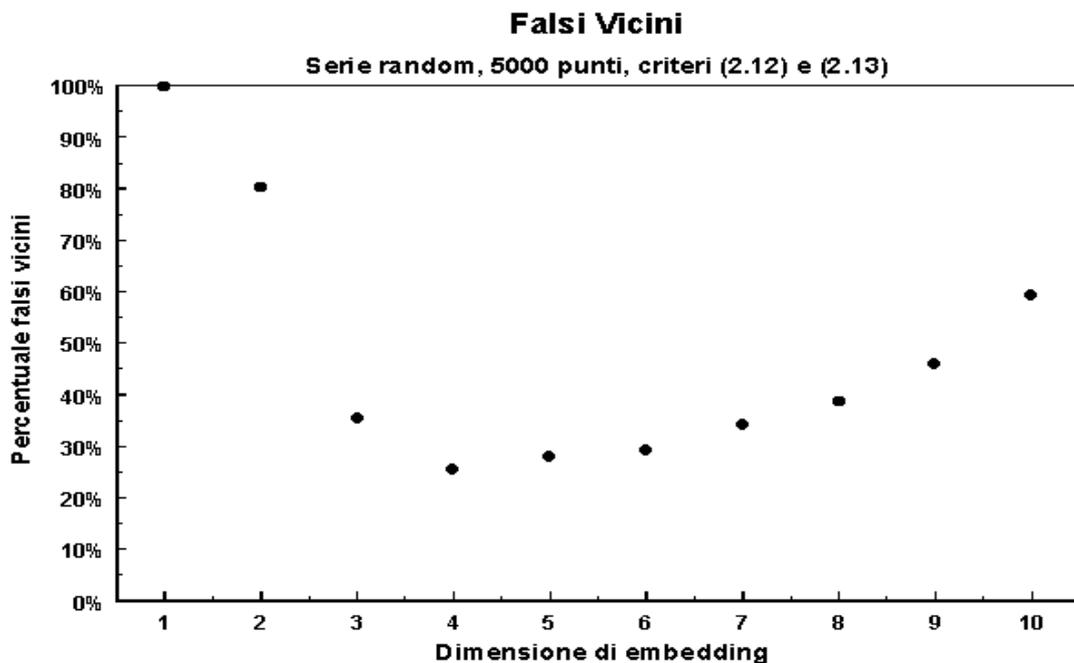


FIGURA 2.5 Percentuale di falsi vicini per la stessa serie di numeri casuali di Figura 2.4: l’uso di entrambi i criteri consente di discriminare la serie stocastica.

2.3 Dimensione di Embedding

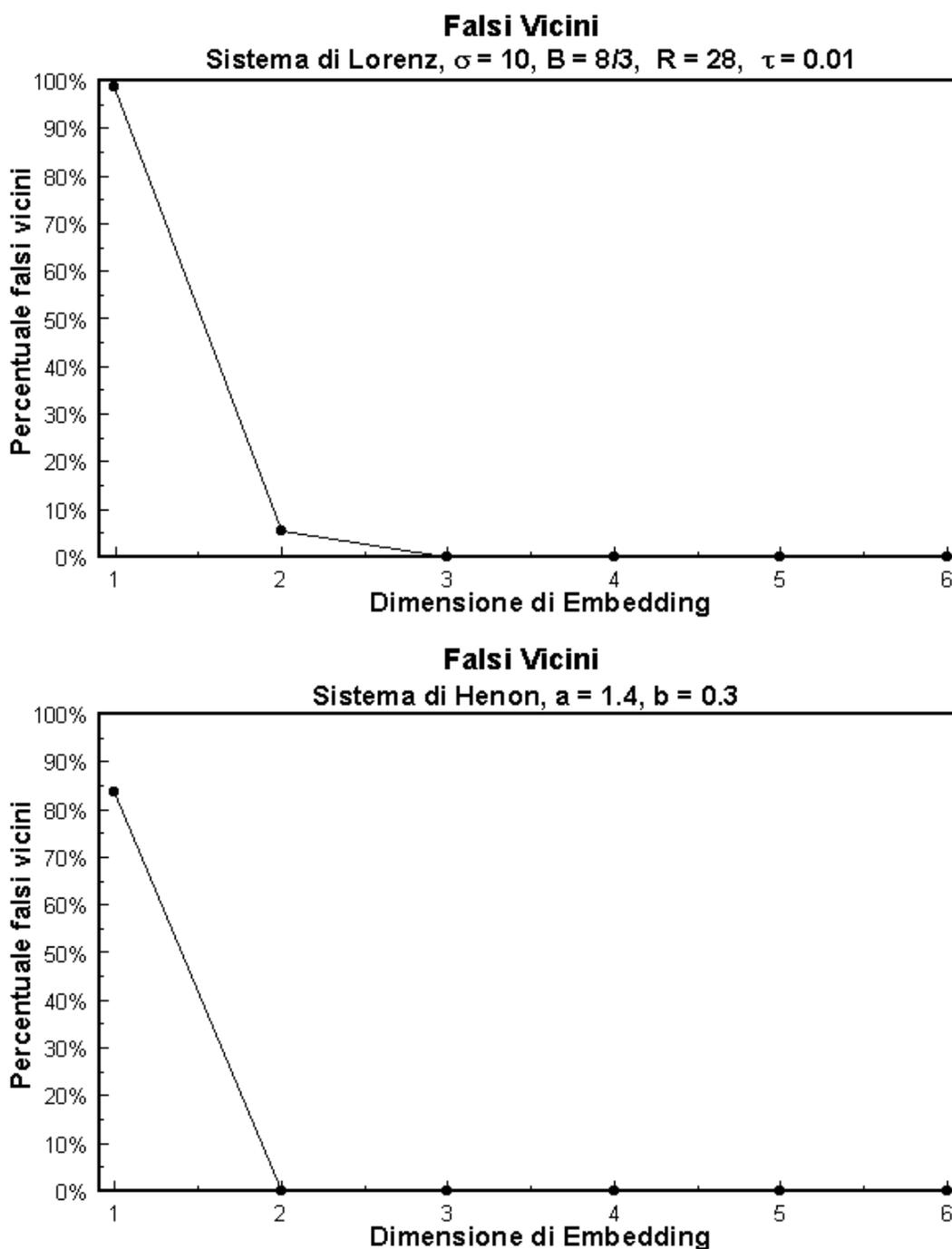


FIGURA 2.6 Percentuale di falsi vicini per il sistema di Lorenz (in alto) e per quello di Hénon (in basso).

Con il *time delay*, che utilizzando il metodo della mutua informazione media è risultato essere pari a 0.17 per il sistema di Lorenz e pari a 1 per il sistema di Hénon; e la dimensione di *embedding*, che utilizzando il metodo dei falsi vicini è risultata essere pari a 3 e pari a 2 rispettivamente, è possibile ricostruire gli attrattori

2. Analisi di un sistema caotico

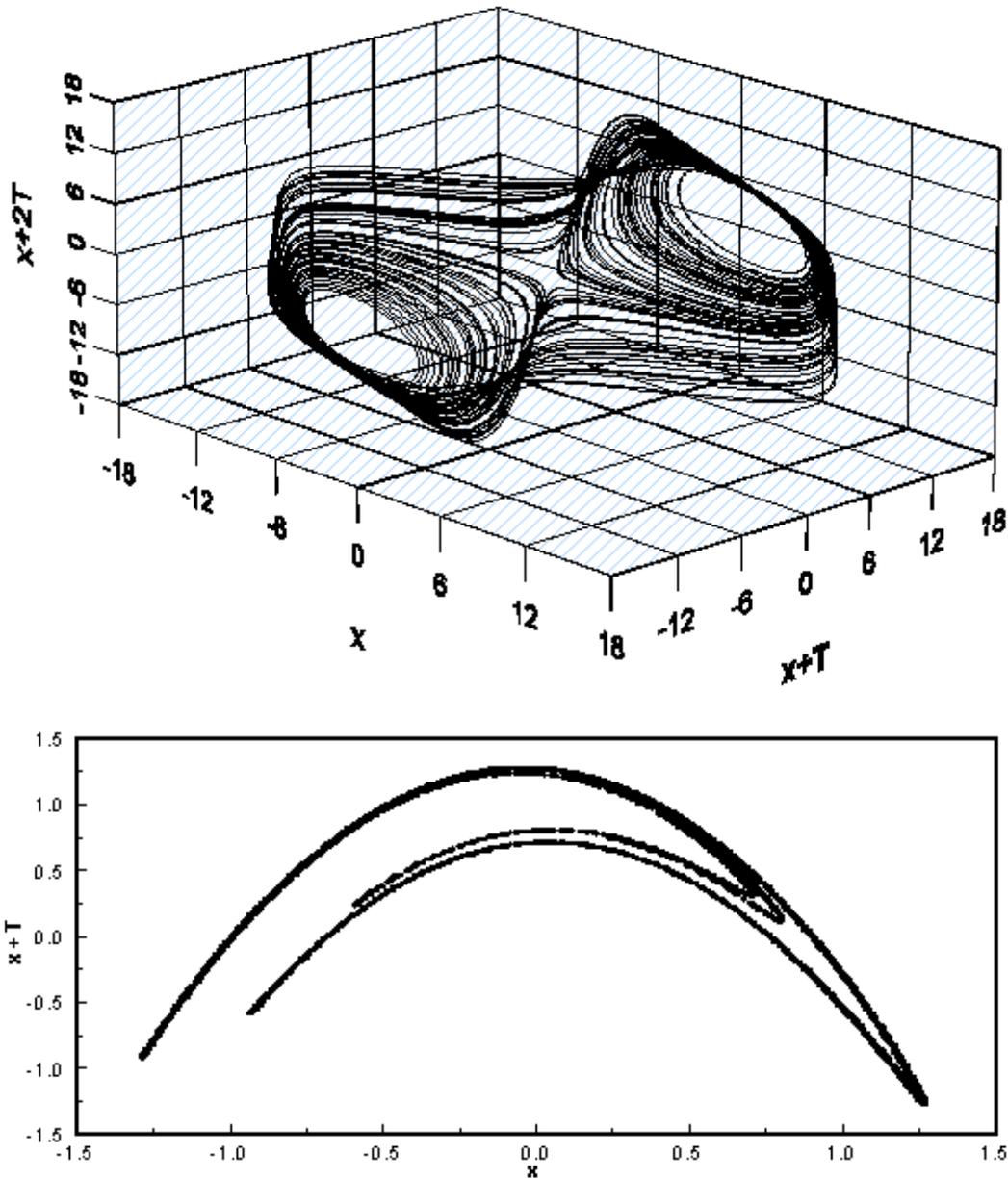


FIGURA 2.7 Attrattore ricostruito del sistema di Lorenz. (in alto) e del sistema di Hénon (in basso)

dei due sistemi sulla base dei soli dati della variabile x . Ovviamente la forma dell'attrattore ricostruito è diversa da quella dell'attrattore del sistema originario ma, in virtù del teorema di *embedding*, i due attrattori hanno le stesse proprietà dinamiche.

Nella Figura 2.7 sono rappresentati gli attrattori ricostruiti del sistema di Lorenz (in alto) e di quello di Hénon (in basso).

2.3 Dimensione di Embedding

Gli attrattori sono formati dalle orbite dei vettori di stato \mathbf{y} dati da:

$$\mathbf{y}(n) = [x(n), x(n+T), x(n+2T)] \quad n = 1, 2, \dots$$

dove $x(n)$ è la prima variabile del sistema.