

3. Invarianti della dinamica

3.1 Dimensione frattale

La dimensione frattale è una caratteristica della geometria dell'attrattore ed è in relazione con il modo in cui i punti sono distribuiti nello spazio di *embedding* a d dimensioni.

Tra la fine dell'ottocento e l'inizio del novecento uno dei principali problemi della matematica era di determinare che cosa esattamente fosse e che proprietà avesse la dimensione di uno spazio; di essa vennero formulate diverse definizioni: dimensione topologica, dimensione di Hausdorff, dimensione frattale, dimensione di autosomiglianza, *box-counting dimension*, dimensione di capacità, dimensione di informazione, dimensione euclidea e altre.

Tutte queste definizioni sono in qualche modo legate tra loro; alcune hanno senso solo in specifiche situazioni e non in altre; in certi casi le diverse definizioni coincidono, in altri non tutte conducono allo stesso risultato numerico.

All'origine del concetto di dimensione frattale c'è la definizione di Hausdorff che risale al 1918.

3.1 Dimensione frattale

3.1.1 Dimensione di Hausdorff

Dato un sottoinsieme A di \mathbf{R}^n , una famiglia di sottoinsiemi aperti di \mathbf{R}^n $\{U_1, U_2, U_3, \dots\}$ è detta un *ricoprimento aperto* di A se

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i .$$

Dati i numeri reali positivi s ed ε , si definisce:

$$h_{\varepsilon}^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s \mid \{U_1, U_2, \dots\} \text{ sia un ricoprimento } \right. \\ \left. \text{aperto di } A \text{ con } \text{diam}(U_i) < \varepsilon \right\} \quad (3.1)$$

ove

$$\text{diam}(U) = \sup \{ d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mid \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U \},$$

è il *diametro* dell'insieme U e $d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ è la distanza euclidea in \mathbf{R}^n .

Nella (3.1) la somma può essere finita o infinita e l'estremo inferiore è esteso a tutti i ricoprimenti aperti di A per i quali gli insiemi U_i hanno diametro minore di ε . Al diminuire di ε diminuiscono i possibili ricoprimenti di A e quindi l'estremo inferiore aumenta tendendo ad un limite, per $\varepsilon \rightarrow 0$, che può essere infinito o un numero reale.

Tale limite:

$$h^s(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_{\varepsilon}^s(A) \quad (3.2)$$

è detto la *misura s -dimensionale di Hausdorff dell'insieme A* .

Hausdorff dimostrò che, per ogni insieme A , esiste un numero $D_H(A)$ tale che:

$$h^s(A) = \begin{cases} \infty & \text{per } s < D_H(A) \\ 0 & \text{per } s > D_H(A) \end{cases} \quad (3.3)$$

3. Invarianti della dinamica

Il numero $D_H(A)$, estremo inferiore dei valori di s per cui $h^s(A) = \infty$ ed estremo superiore dei valori di s per cui $h^s(A) = 0$, è detto *dimensione di Hausdorff dell'insieme A*:

$$D_H(A) = \inf\{s \mid h^s(A) = 0\} = \sup\{s \mid h^s(A) = \infty\}. \quad (3.4)$$

Se $s = D_H(A)$ allora $h^s(A)$ può essere zero, infinito o un numero reale positivo.

Alcune fondamentali proprietà della dimensione di Hausdorff sono le seguenti:

- i. Se $A \subset \mathbf{R}^n$ allora $D_H(A) \leq n$.
- ii. Se $A \subset B$ allora $D_H(A) \leq D_H(B)$.
- iii. Se A è un insieme numerabile allora $D_H(A) = 0$.
- iv. Se $A \subset \mathbf{R}^n$ e $D_H(A) < 1$ allora A è totalmente disconnesso.
- v. Sia C_∞ l'insieme di Cantor⁽⁴⁾, allora $D_H(C_\infty) = \log 2 / \log 3$.

La dimensione di Hausdorff, benché storicamente molto importante, è di scarso interesse pratico poiché è molto difficile da calcolare in casi elementari e praticamente impossibile da stimare in casi concreti. La difficoltà principale è data dal calcolo dei termini $\sum_{i=0}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s$. La *box-counting dimension* semplifica il problema rimpiazzando tali termini.

3.1.2 Box-counting dimension

Dato un sottoinsieme limitato A di \mathbf{R}^n sia $N_\delta(A)$ il più piccolo numero di insiemi di diametro minore o uguale a δ che ricopre A ⁽⁵⁾. Allora la *box-counting dimension* è definita come:

$$D_b(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{\log 1/\delta}. \quad (3.5)$$

⁴ L'insieme di Cantor è un insieme infinito di punti nell'intervallo unitario $[0,1]$ che si ottiene dividendo tale intervallo in tre parti uguali, togliendo la parte centrale ed iterando all'infinito la procedura alle parti rimanenti.

⁵ Poiché A è limitato, si può assumere che tale numero sia finito.

3.1 Dimensione frattale

Esistono diverse definizioni equivalenti di $D_b(A)$. Per esempio, suddividendo \mathbf{R}^n mediante un reticolo di passo δ e indicato con $N'_\delta(A)$ il numero di “cubetti” che interseca A , si può verificare che:

$$D_b(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N'_\delta(A)}{\log 1/\delta}. \quad (3.6)$$

In sostanza la (3.5) afferma che $N_\delta(A) \propto \delta^{-s}$ per piccoli δ , dove $s = D_b(A)$. D'altro canto:

$$N_\delta(A)\delta^s = \inf \left\{ \sum_i \delta^s \mid \{U_1, U_2, \dots\} \text{ sia un ricoprimento} \right. \\ \left. \text{aperto di } A \text{ con } \text{diam}(U_i) < \delta \right\} \quad (3.7)$$

e quindi, confrontando la (3.7) e la (3.1) si vede come la differenza stia proprio nei termini $\sum_{i=0}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s$ sostituiti dai termini $\sum_i \delta^s$.

L'algoritmo per il calcolo della *box-counting dimension* è apparentemente semplice; nel caso dell'attrattore di Lorenz si potrebbe procedere come segue:

1. si determina un parallelepipedo che contenga l'attrattore,
2. si suddivide tale regione in cubetti di lato δ ,
3. si conta il numero di cubetti, $N(\delta)$, che contiene almeno un punto dell'attrattore,
4. si ripete la procedura per valori decrescenti di δ ,

il numero di cubetti contenenti punti dell'attrattore è proporzionale ad una qualche potenza di δ :

$$N(\delta) \propto \delta^{-D_b} \quad (3.8)$$

ove D_b è la *box-counting dimension*. Quindi, rappresentando $\log N(\delta)$ in funzione di $\log 1/\delta$, si ottiene una retta la cui pendenza fornisce la grandezza cercata.

Purtroppo il fatto che nel caso di dati sperimentali il numero di punti sull'attrattore sia finito, implica che esiste un particolare valore δ^* tale che, se $\delta < \delta^*$, $N(\delta)$ assume un valore costante pari al numero di punti sull'attrattore⁽⁶⁾.

⁶ Basta porre δ^* pari alla minima distanza tra due punti qualunque dell'attrattore.

3. Invarianti della dinamica

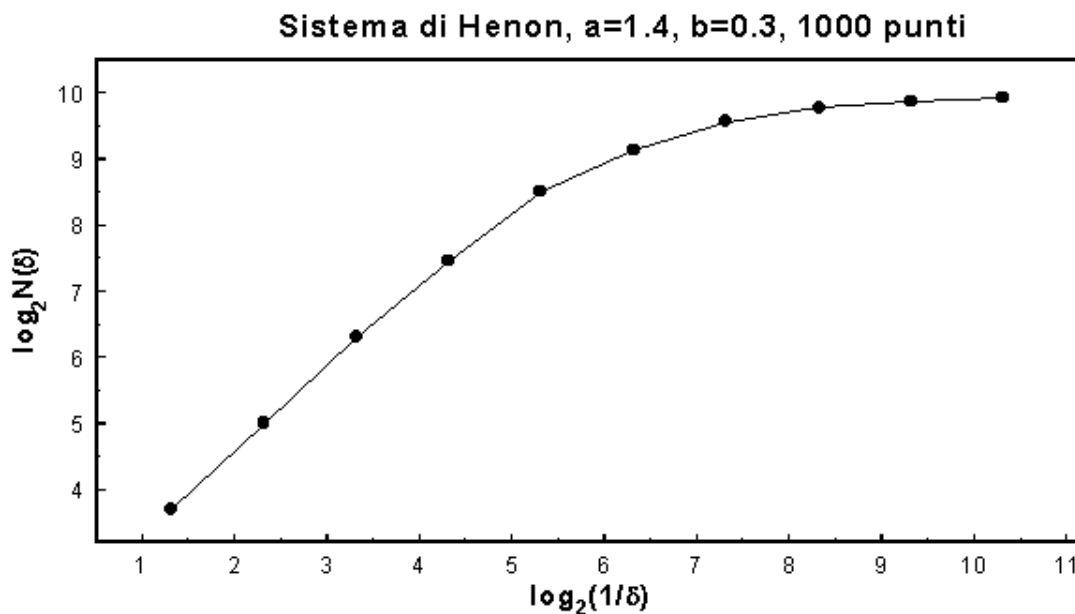


FIGURA 3.1 $\log_2 N(\delta)$ in funzione di $\log_2 1/\delta$ per il sistema di Hénon. Sono stati utilizzati solo 1000 punti per rendere più evidente la saturazione della curva.

Dunque, benché più semplice da calcolare della dimensione di Hausdorff, anche la stima della *box-counting dimension* risulta piuttosto problematica.

Nella Figura 3.1 è rappresentato il grafico di $\log_2 N(\delta)$ in funzione di $\log_2 1/\delta$ per il sistema di Hénon: appare evidente come, al diminuire di δ , la curva saturi rendendo così impossibile la determinazione della pendenza nella zona ad alta risoluzione. D'altro canto un *fitting* della sola zona lineare a bassa risoluzione indurrebbe un errore sistematico nella stima della dimensione che, in base alla definizione (3.5), deve essere valutata per valori di δ piccoli.

Un ulteriore limite della *box-counting dimension* è che un cubetto che interseca l'attrattore viene contato una sola volta indipendentemente dal numero di punti contenuti e dunque tale grandezza non riflette in alcun modo la distribuzione dei punti all'interno dell'orbita.

La *dimensione di informazione* tiene conto del peso di ciascun cubetto e considera il grado di disomogeneità nella distribuzione dei punti rispetto allo spazio ricoperto dall'attrattore.

3.1 Dimensione frattale

3.1.3 Dimensione di informazione

Dato un sottoinsieme aperto B dello spazio che contiene l'attrattore del sistema, la percentuale dei punti dell'attrattore contenuti in B è detta *misura naturale* per il sistema:

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n U_B(x_k) \quad (3.9)$$

dove:

$$U_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La misura naturale quantifica la “massa” di una data porzione dell'attrattore.

Volendo dunque tenere conto del peso di ciascun cubetto la grandezza $\log N(\delta)$ va sostituita dalla:

$$I(\delta) = \sum_{k=1}^{N(\delta)} \mu(B_k) \log_2 \frac{1}{\mu(B_k)} \quad (3.10)$$

ove la somma è estesa ai soli $N(\delta)$ insiemi (o “cubetti” di lato δ) che intersecano l'attrattore.

La grandezza $I(\delta)$ rappresenta la quantità di informazione necessaria a determinare la posizione di un punto nell'attrattore con un'accuratezza pari a $\delta^{(7)}$.

Al diminuire di δ $I(\delta)$ aumenta e se si rappresenta $I(\delta)$ in funzione di $\log_2 1/\delta$, si vede che le due grandezze sono legate da una legge di potenza:

$$I(\delta) \approx I_0 + D_i \log_2 \frac{1}{\delta}. \quad (3.11)$$

⁷ Volgarizzando la Teoria dell'Informazione di Shannon, si può dire che $I(\delta)$ rappresenta il numero medio di domande, le cui risposte possono essere solo sì o no, necessario a determinare se un dato punto appartiene ad un dato insieme. Il logaritmo in base 2 nella (3.11) offre il vantaggio che $I(\delta)$ risulta così espressa in unità di bits.

3. Invarianti della dinamica

ove I_0 è una costante e D_i , che quantifica l'aumento di informazione ottenuto raddoppiando la risoluzione del reticolo che ricopre l'attrattore, è, per definizione, la *dimensione di informazione*.

Nella Figura 3.2 è rappresentato il grafico di $I(\delta)$ in funzione di $\log_2 1/\delta$ per il sistema di Hénon. Il problema della saturazione, che la dimensione di informazione riduce ma comunque non elimina, è meno evidente anche perché sono stati utilizzati 10000 punti rispetto ai 1000 della Figura 3.1.

Anche in questo caso l'algoritmo, pur essendo concettualmente semplice, è di difficile applicazione ai dati sperimentali. La procedura infatti, già nel caso bidimensionale dell'attrattore di Hénon, richiede un uso intensivo e prolungato del calcolatore (dell'ordine dell'ora per 10000 punti e 7 valori di δ fino ad un minimo pari a circa 2^{-8} , grandezze comunque insufficienti) e, soprattutto, un numero molto elevato di punti (dell'ordine di 10^7 per una stima attendibile) tale da renderla inapplicabile a sistemi dinamici, soprattutto ambientali, che possono avere quattro o più gradi di libertà.

Il valore della dimensione di informazione che si desume dai dati di Figura

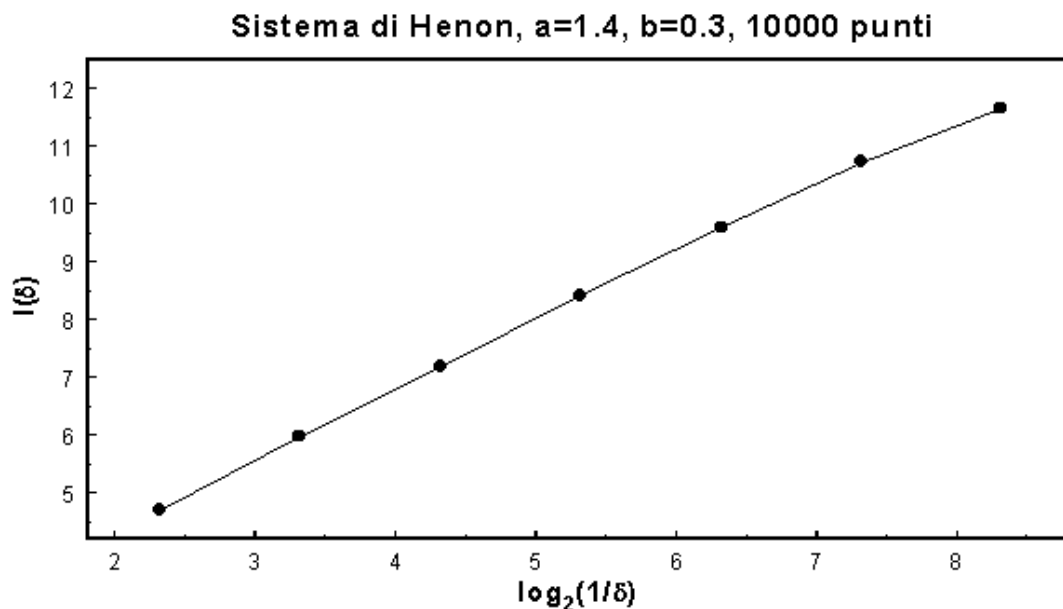


FIGURA 3.2 $I(\delta)$ in funzione di $\log_2 1/\delta$ per il sistema di Hénon.

3.1 Dimensione frattale

3.2 è pari a

$$D_i = 1.17 \pm 0.02.$$

Tale valore è sottostimato a causa del numero di punti non sufficiente infatti Peitgen, Jürgens e Supe (1992) usando 10^8 punti ottengono:

$$D_i = 1.23 \pm 0.02.$$

Il fatto che Grassberger (1983), in seguito a calcoli piuttosto elaborati e sofisticati, abbia ottenuto il valore

$$D_b = 1.28 \pm 0.01$$

per la *box-counting dimension* dell'attrattore di Hénon, non è in contraddizione con il risultato di Peitgen; tra la dimensione di informazione e la *box-counting dimension* sussiste infatti la seguente relazione:

$$D_i \leq D_b. \quad (3.12)$$

La (3.12) deriva dalla fondamentale disuguaglianza tra la media geometrica e quella aritmetica di un insieme di numeri a_1, a_2, \dots, a_N positivi:

$$\sqrt[N]{\prod_{k=1}^N a_k} \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k. \quad (3.13)$$

Se con p_k si indicano N numeri positivi tali che $p_1 + \dots + p_N = 1$ allora, in base alla (3.13), si ha:

$$\prod_{k=1}^N a_k^{p_k} \leq \sum_{k=1}^N p_k a_k. \quad (3.14)$$

dove vale l'uguaglianza solo se gli a_k sono tutti uguali.

Posto $a_k = 1/p_k$ e $N = N(\delta)$, la (3.14) diviene:

3. Invarianti della dinamica

$$\prod_{k=1}^{N(\delta)} \left(\frac{1}{p_k} \right)^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{N(\delta)} p_k \frac{1}{p_k} = N(\delta).$$

Se le p_k indicano la misura naturale $\mu(B_k)$, passando ai logaritmi si ha:

$$I(\delta) = \sum_{k=1}^{N(\delta)} p_k \log_2 \frac{1}{p_k} \leq \log_2 N(\delta).$$

Da cui, in base alle definizioni

$$D_i = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{I(\delta)}{\log_2 1/\delta} \quad \text{e} \quad D_b = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log_2 N(\delta)}{\log_2 1/\delta},$$

si ricava la (3.12).

3.1.4 Dimensione generalizzata e dimensione di correlazione

Sia la *box-counting dimension* che la dimensione di informazione sono contenute in un insieme di definizioni più generale noto come *dimensioni di Rényi* (1970). Queste si ottengono sostituendo l'informazione $I(\delta)$ della (3.10) con l'informazione del q -esimo ordine di Rényi:

$$I_q(\delta) = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_{k=1}^{N(\delta)} p_k^q \quad (3.15)$$

ove $q \geq 0$, $p_k = \mu(B_k)$ e la somma è estesa ai soli $N(\delta)$ insiemi che intersecano l'attrattore.

La dimensione di Rényi D_q è definita come:

$$D_q = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{I_q(\delta)}{\log_2 1/\delta}. \quad (3.16)$$

Se $q = 0$ dalla (3.16) si ricava:

$$I_0(\delta) = \log_2 N(\delta)$$

e dunque la dimensione di Rényi D_0 coincide con la *box-counting dimension*:

3.1 Dimensione frattale

$$D_0 = D_b. \quad (3.17)$$

Se $q=1$ l'informazione (3.16) si può calcolare con la regola di l'Hospital:

$$I_1(\delta) = -\lim_{q \rightarrow 1} \frac{\sum p_k^q \ln p_k}{\sum p_k^q \ln 2},$$

e ricordando che $\sum p_k = 1$, si ottiene infine:

$$I_1(\delta) = \sum_{k=1}^{N(\delta)} p_k \log_2 \frac{1}{p_k}. \quad (3.18)$$

La (3.18) è proprio l'informazione (3.10) e quindi si ha che la dimensione di Rényi D_1 coincide con la dimensione di informazione:

$$D_1 = D_i. \quad (3.19)$$

In accordo con la (3.12), la dimensione di Rényi è una funzione decrescente di q , cioè:

$$D_p \geq D_q \quad \text{se } p < q.$$

Se D_q diminuisce strettamente all'aumentare di q , allora l'attrattore è detto *multifrattale*.

In generale, il termine p_k^q nella (3.15) rappresenta la probabilità che q punti scelti a caso nell'attrattore appartengano al medesimo insieme B_k e la somma $\sum p_k^q$ è la probabilità che i q punti appartengano tutti ad uno qualunque degli insiemi B_k . Questa probabilità è proporzionale al numero relativo di insiemi di q punti dell'attrattore, $C_q(\delta)$, le cui distanze reciproche siano tutte inferiori a δ . In altri termini, dati m punti sull'attrattore x_0, x_1, \dots, x_m , sia $T_q(m, \delta)$ il numero di insiemi di q punti $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_q})$ che soddisfano alla:

$$d(x_{i_k}, x_{i_l}) < \delta \quad \text{per } k, l = 1, \dots, q$$

dove $d(x, y)$ è la distanza euclidea. Allora:

3. Invarianti della dinamica

$$C_q(\delta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_q(m, \delta)}{m^q},$$

e si ha:

$$\sum_{k=1}^{N(\delta)} p_k^q \propto C_q(\delta).$$

In base a (3.15) e (3.16), si ricava infine:

$$D_q = \frac{1}{1-q} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log_2 C_q(\delta)}{\log_2 1/\delta}. \quad (3.20)$$

Quando $q = 2$, $C_2(\delta)$ rappresenta una sorta di correlazione tra coppie di punti dell'attrattore ed è detta *funzione di correlazione*, analogamente la dimensione D_2 è nota come *dimensione di correlazione*.

3.2 L'algoritmo di Grassberger-Procaccia

Nel 1983 Grassberger e Procaccia (1983a, 1983b) suggerirono di valutare la dimensione di correlazione per stabilire sia la dimensione di *embedding* che la eventuale dimensione frattale di un sistema dinamico, inaugurando così quel campo della ricerca volto a determinare la caoticità dei più diversi sistemi: dalla meccanica dei fluidi alla fisica dello stato solido, alla meteorologia, all'economia.

L'algoritmo proposto per il calcolo della dimensione di correlazione è il seguente:

1. Fissato il *time delay* T (par. 2.2), per valori crescenti, a partire da 1, della dimensione di *embedding* si calcola la grandezza $C_2(r)$ in base alla:

$$C_2(r) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} \theta(r - |\mathbf{y}(j) - \mathbf{y}(i)|) \quad (3.21)$$

(mantenendo la notazione più diffusa sostituiamo δ con r) ove le $\mathbf{y}(i)$, $i = 1, \dots, N$, sono i punti dello spazio delle fasi ricostruito e θ è la funzione di Heaviside:

3.2 L'algoritmo di Grassberger-Procaccia

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2. Il diagramma di $\log C_2(r)$ in funzione di $\log r$ risulta formato, al variare della dimensione di *embedding* m , da un fascio di curve con un ampio tratto rettilineo; la pendenza di tale regione lineare è una funzione crescente di m sino a che, se il sistema è caotico, viene raggiunta la corretta dimensione di embedding⁽⁸⁾; a questo punto la pendenza satura ad un valore che rappresenta la dimensione di correlazione. Se il sistema non è caotico la pendenza dei tratti rettilinei cresce indefinitamente.

Il metodo illustrato consente di discriminare sistemi stocastici da sistemi caotici e, se esiste l'attrattore, permette di determinarne sia la dimensione di *embedding* che la dimensione frattale (di correlazione). Tale metodo, tuttavia, presenta problemi che ne limitano l'applicabilità, come vedremo in seguito.

Nelle Figure 3.4 e 3.5 sono rappresentate le funzioni di correlazione, per diversi valori della dimensione di embedding m , relative alla variabile x del sistema di Lorenz e alla variabile x del sistema di Hénon.

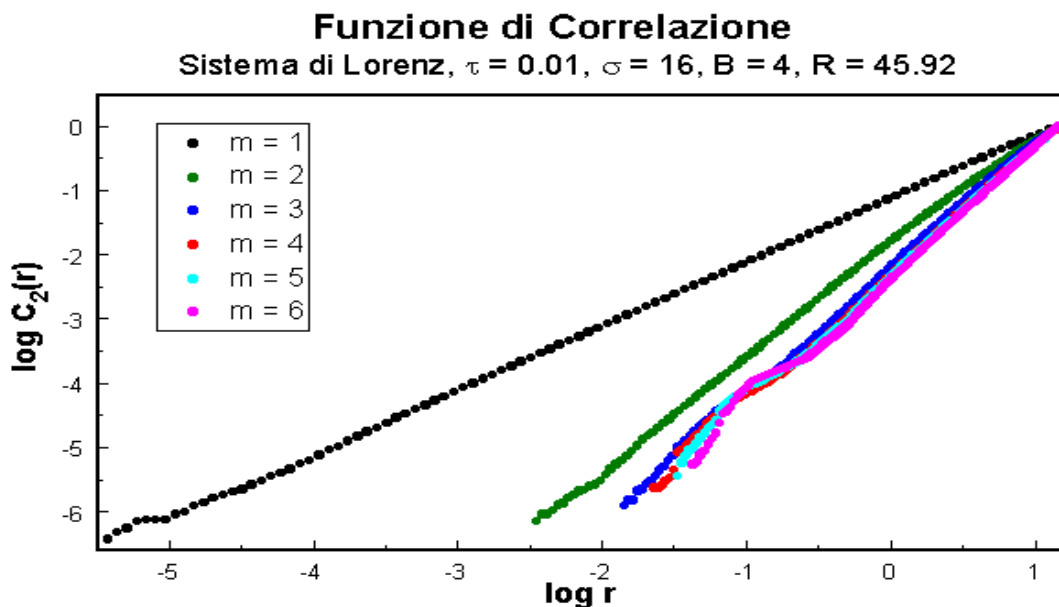


FIGURA 3.4 Funzione di correlazione per la variabile x del sistema di Lorenz relativa a sei valori della dimensione di embedding. Sono stati utilizzati 10000 punti.

⁸ Cfr. par. 2.3.

3. Invarianti della dinamica

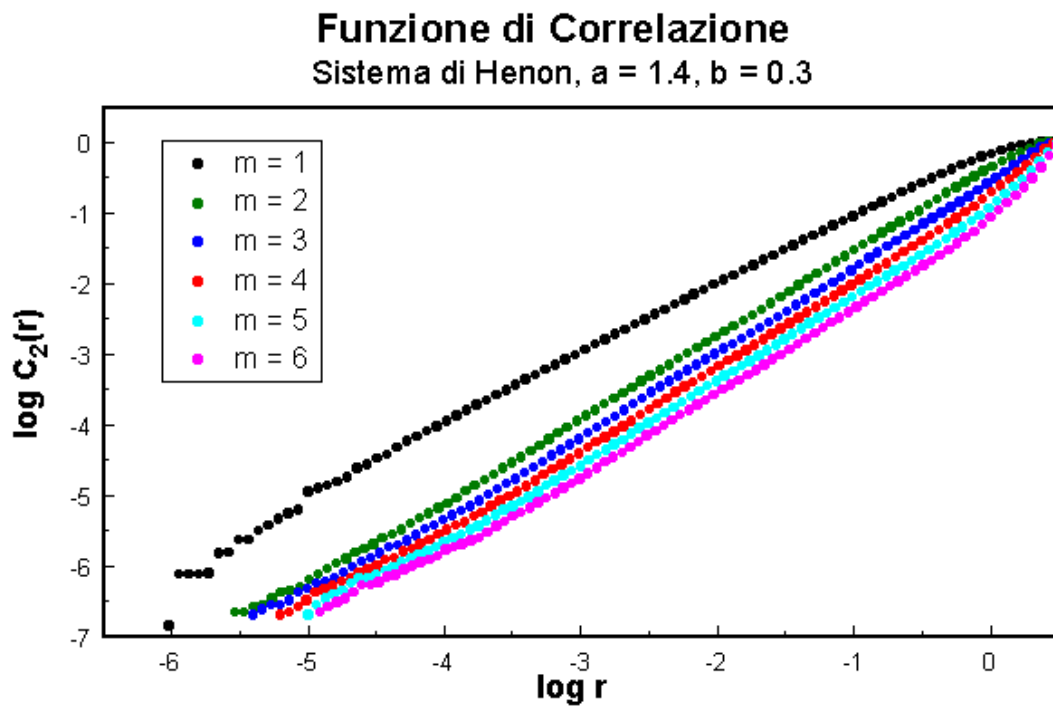


FIGURA 3.5 Funzione di correlazione per la variabile x del sistema di Hénon relativa a sei valori della dimensione di embedding. Sono stati utilizzati 10000 punti.

Come si vede dalle figure, anche nel caso ideale di dati generati al computer nella quantità desiderata e privi di rumore, per poter determinare le pendenze occorre stabilire l'estensione della zona lineare di ciascuna curva, che diventa sempre più

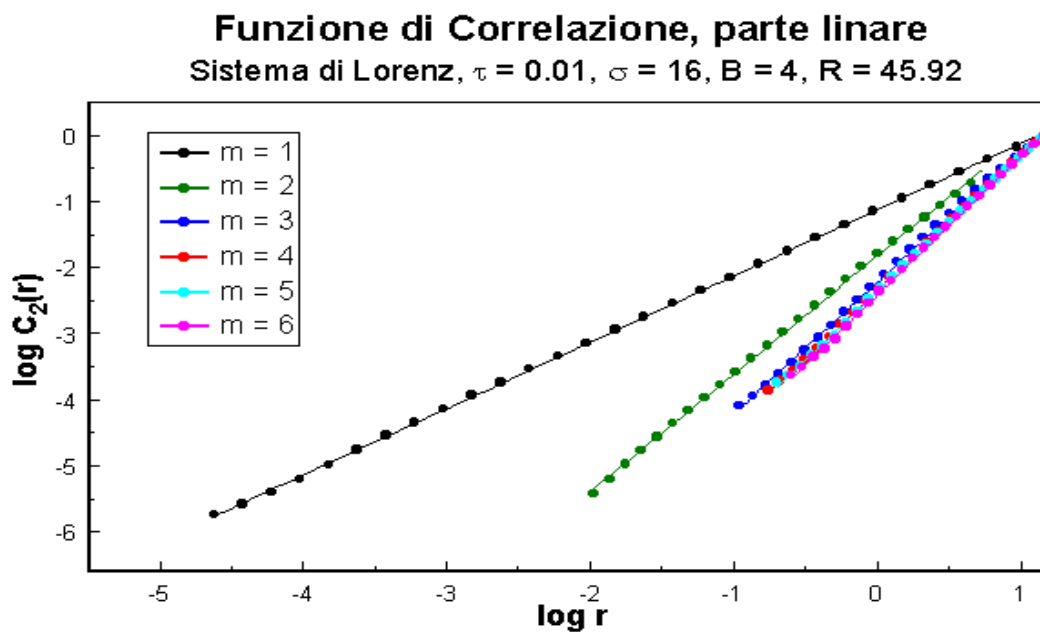


FIGURA 3.6 Zone lineari delle curve di Figura 3.4. Per rendere visibili le rette di interpolazione è stato rappresentato solo un punto ogni tre.

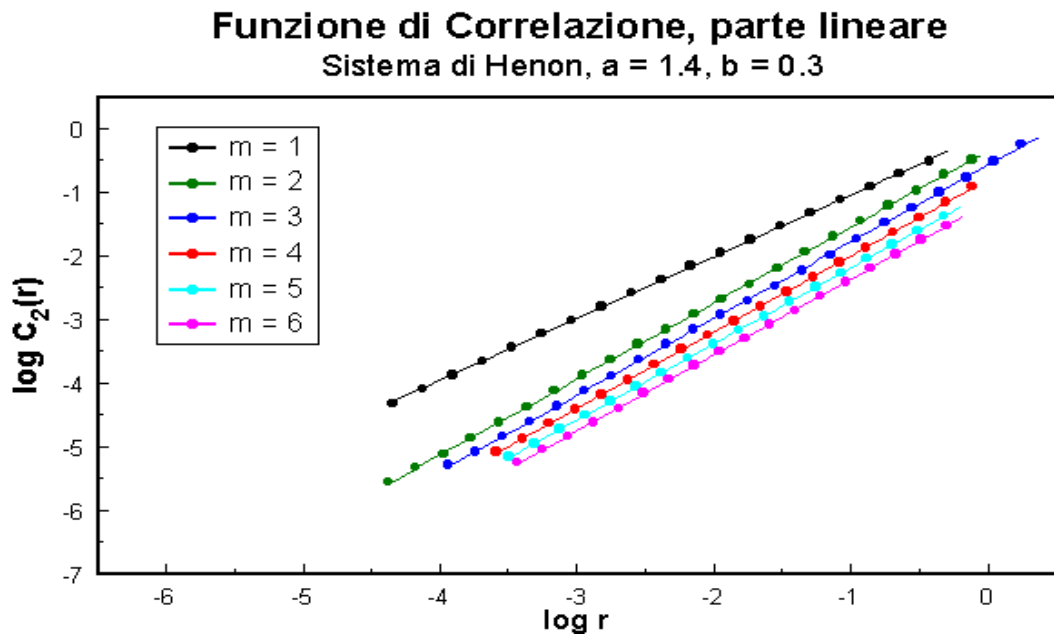


FIGURA 3.7 Zone lineari delle curve di Figura 3.5. Per rendere visibili le rette di interpolazione è stato rappresentato solo un punto ogni tre.

piccola al crescere della dimensione di *embedding*. Tale operazione è soggettiva ed arbitraria e quindi, soprattutto quando si analizzano dati sperimentali può fornire risultati tutt'altro che univoci in relazione alla quota di rumore presente ed al numero dei dati disponibili.

Nelle Figure 3.6 e 3.7 sono rappresentate le zone lineari delle curve delle Figure 3.4 e 3.5 (è stato disegnato solo un dato ogni tre affinché fossero visibili le rette di interpolazione). È evidente come, nel caso del sistema di Lorenz, la pendenza aumenti con la dimensione di *embedding* per $1 \leq m \leq 3$, per $m \geq 3$ la pendenza rimane pressoché costante ad indicare così che la corretta dimensione di *embedding* è stata raggiunta. Analogamente, per il sistema di Hénon, la pendenza delle rette aumenta quando m passa da 1 a 2 per poi rimanere costante per valori di m compresi tra 2 e 6.

In base alla (3.21) il valore di saturazione della pendenza corrisponde alla dimensione di correlazione D_2 .

Nelle Figure 3.8 e 3.9 sono rappresentate le pendenze delle rette delle Figura 3.6 e 3.7 in funzione della dimensione di embedding. Le dimensioni di correlazione sono state calcolate come la media delle pendenze relative ai valori di saturazione di m e sono rappresentate dalle rette orizzontali.

3. Invarianti della dinamica

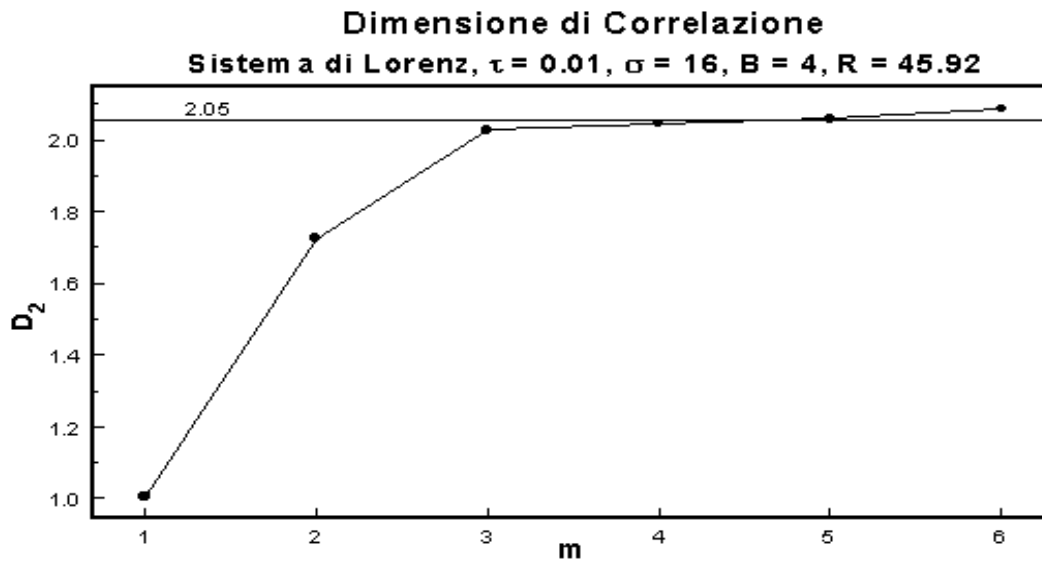


FIGURA 3.8 Pendenza delle rette di Figura 3.6 in funzione della dimensione di *embedding*. La linea orizzontale corrisponde alla media delle pendenze relative ai valori di m compresi tra 3 e 6.

Infine, nella tabella 3.1 si confrontano i risultati ottenuti con i valori pubblicati in letteratura (Grassberger e Procaccia, 1983).

I buoni risultati ottenuti nel caso del sistema di Lorenz e del sistema di Hénon non devono far dimenticare che questo metodo, oltre che dipendere da valutazioni di

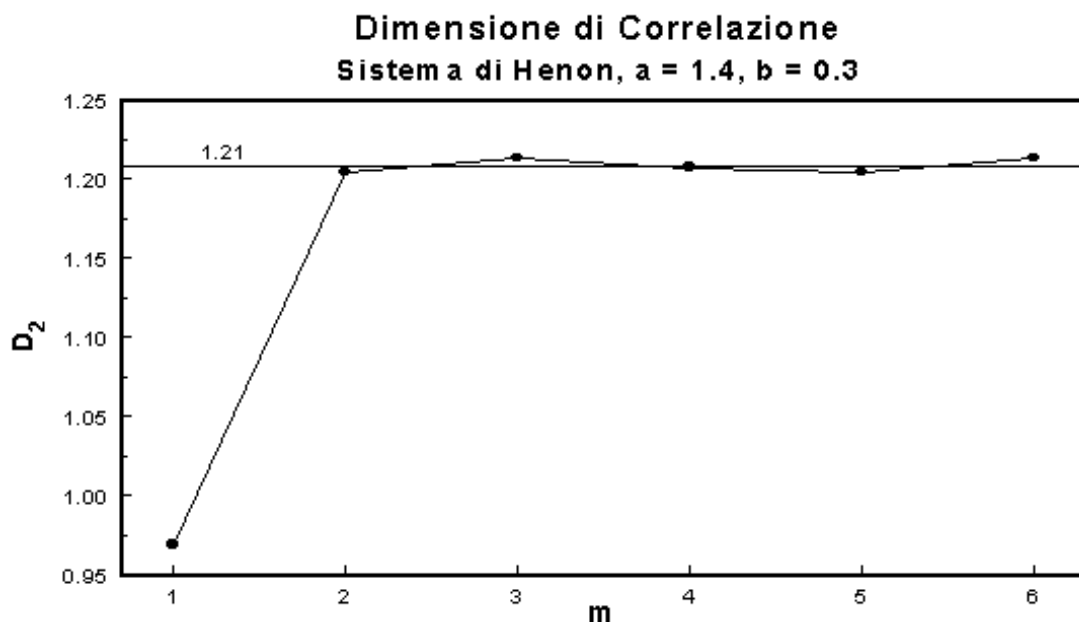


FIGURA 3.9 Pendenza delle rette di Figura 3.7 in funzione della dimensione di *embedding*. La linea orizzontale corrisponde alla media delle pendenze relative ai valori di m compresi tra 2 e 6.

3.3 Gli esponenti di Lyapunov

DIMENSIONE DI CORRELAZIONE		
	Valori calcolati	Grassberger e Procaccia
Sistema di Lorenz	2.05 ± 0.01	2.05 ± 0.01
Sistema di Hénon	1.21 ± 0.02	1.25 ± 0.02

TABELLA 3.1 Confronto tra i valori della dimensione di correlazione calcolati e quelli determinati da Grassberger e Procaccia.

carattere soggettivo, non è del tutto affidabile essendo molto sensibile al rumore cui sono affetti i dati sperimentali. Inoltre sono noti dei casi di saturazione delle pendenze anche in presenza di sistemi stocastici (Theiler, 1986; Osborne e Provenzale, 1989; Provenzale et al., 1992). Per ovviare a quest'ultimo problema si deve ricorrere al metodo della serie surrogata che sarà descritto nel prossimo capitolo.

In generale quindi, a meno che non sia necessario conoscere la dimensione di correlazione, i metodi più indicati per stabilire la caoticità di un sistema sono quello dei falsi vicini, illustrato nel paragrafo 2.3, ed il calcolo del primo esponente di Lyapunov, oggetto dei prossimi paragrafi.

3.3 Gli esponenti di Lyapunov

Come abbiamo visto⁽⁹⁾, in un sistema caotico orbite passanti per punti anche molto vicini divergono a causa della dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali; la misura della velocità di divergenza delle orbite è nota come *primo esponente di Lyapunov* del sistema.

Per capire il significato geometrico degli esponenti di Lyapunov si considerino gli effetti della dinamica su di un piccolo ipervolume sferico di riferimento contenuto nello spazio delle fasi. Equazioni della dinamica non lineari e generalmente complicate, quali quelle associate a sistemi caotici, avranno l'effetto di far evolvere l'elemento sferico di riferimento verso forme molto complesse. Se però si considerano scale lineari e temporali sufficientemente piccole, l'effetto della

⁹ Cfr. Par. 1.2.

3. Invarianti della dinamica

la dinamica sarà quello di distorcere la sfera in un ellissoide comprimendola lungo alcune direzioni e stirandola lungo altre. L'asse maggiore dell'ellissoide corrisponderà alla direzione più instabile del flusso e il maggiore (o primo) esponente di Lyapunov è la misura del tasso di espansione di tale asse. Più precisamente, indicato con $r(0)$ il raggio iniziale della sfera e con $l_i(t)$ la lunghezza dell' i -esimo asse principale all'istante t , l' i -esimo esponente di Lyapunov è definito come:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{l_i(t)}{r(0)}. \quad (3.23)$$

Per convenzione gli esponenti di Lyapunov sono sempre ordinati in modo tale che $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots$.

La somma di tutti gli esponenti di Lyapunov misura dunque la velocità di contrazione di un elemento di volume nello spazio delle fasi all'evolvere del tempo e sarà pertanto nulla per i sistemi conservativi e negativa per quelli dissipativi, siano essi caotici o no.

Mentre in un sistema dissipativo stabile il volume tende semplicemente a contrarsi, e quindi gli esponenti sono negativi o nulli, in un sistema dissipativo caotico si ha un compromesso tra due opposte tendenze: la dissipazione ha un ruolo stabilizzante poiché fa contrarre il volume nello spazio delle fasi, mentre l'instabilità orbitale fa sì che traiettorie inizialmente vicine si separino esponenzialmente e quindi almeno uno degli esponenti deve essere positivo. Pertanto, la presenza di un esponente positivo serve a stabilire se un sistema è caotico.

La divergenza delle traiettorie implica che se le condizioni iniziali di un sistema vengono determinate con un errore E_0 , nel corso delle successive iterazioni tale errore verrà amplificato. Una definizione alternativa ed equivalente del primo esponente di Lyapunov serve a caratterizzare la crescita logaritmica media dell'errore relativo per iterazione:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{E_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left| \frac{E_k}{E_{k-1}} \right|. \quad (3.24)$$

In altre parole, un piccolo errore nelle condizioni iniziali sarà amplificato in media di un fattore e^λ per ciascuna iterazione.

3.4 Determinazione analitica degli esponenti di Lyapunov

Nel caso in cui sia nota la dinamica del sistema:

$$\mathbf{y}(k) \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{y}(k)) = \mathbf{y}(k+1), \quad (3.25)$$

gli esponenti di Lyapunov possono essere determinati osservando l'andamento dell'evoluzione di una piccola perturbazione $\delta(k)$ di un'orbita $\mathbf{y}(k)$.

In base alla (3.25) si ha:

$$\mathbf{y}(k+1) + \delta(k+1) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(k) + \delta(k)) \approx \mathbf{DF}(\mathbf{y}(k)) \cdot \delta(k) + \mathbf{F}(\mathbf{y}(k))$$

cioè,

$$\delta(k+1) = \mathbf{DF}(\mathbf{y}(k)) \cdot \delta(k), \quad (3.26)$$

purché δ rimanga abbastanza piccolo. Nella (3.26) \mathbf{DF} è la matrice jacobiana:

$$\mathbf{DF}(\mathbf{x})_{ij} = \frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$$

Passando dall'istante k all'istante $k+L$, la perturbazione subisce un'evoluzione definita da:

$$\begin{aligned} \delta(k+L) &= \mathbf{DF}(\mathbf{y}(k+L-1)) \cdot \mathbf{DF}(\mathbf{y}(k+L-2)) \cdot \dots \cdot \mathbf{DF}(\mathbf{y}(k)) \cdot \delta(k) \\ &= \mathbf{DF}^L(\mathbf{y}(k)) \cdot \delta(k), \end{aligned}$$

ove $\mathbf{DF}^L(\mathbf{x})$ rappresenta la composizione degli L Jacobiani.

Si consideri ora il quadrato della lunghezza del vettore $\delta(k+L)$:

$$|\delta(k+L)|^2 = \delta^T(k) \cdot [\mathbf{DF}^L(\mathbf{y}(k))]^T \cdot \mathbf{DF}^L(\mathbf{y}(k)) \cdot \delta(k) \quad (3.27)$$

ove l'apice T sta ad indicare la matrice trasposta. La grandezza da determinare nella (3.27) è la matrice:

3. Invarianti della dinamica

$$\left[\mathbf{DF}^L(\mathbf{x}) \right]^T \cdot \mathbf{DF}^L(\mathbf{x}).$$

In base al *teorema ergodico moltiplicativo* del matematico russo Oseledec quando \mathbf{x} è un'orbita di un sistema caotico dipendente dal tempo, la matrice:

$$\mathbf{OSL}(\mathbf{x}, L) = \left(\left[\mathbf{DF}^L(\mathbf{x}) \right]^T \cdot \mathbf{DF}^L(\mathbf{x}) \right)^{\frac{1}{2L}}$$

è tale che la matrice:

$$\mathbf{OSL}(\mathbf{x}) = \lim_{L \rightarrow \infty} \mathbf{OSL}(\mathbf{x}, L)$$

esiste ed è indipendente da \mathbf{x} per ogni \mathbf{x} appartenente al bacino di attrazione dell'attrattore cui appartiene l'orbita; inoltre i logaritmi degli autovalori di tale matrice ortogonale sono gli esponenti di Lyapunov λ_i , $i=1,2,\dots,d$ del sistema dinamico $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Di fatto la determinazione degli autovalori della matrice di Oseledec è tutt'altro che banale; tale problema richiede l'utilizzo di una decomposizione ricorsiva QR la cui descrizione esula dagli scopi di questa tesi.

3.5 Calcolo degli esponenti di Lyapunov dai dati sperimentali

Per determinare gli esponenti di Lyapunov da una serie temporale di dati sperimentali utilizzando il procedimento descritto nel paragrafo precedente occorre un metodo che permetta di calcolare la matrice Jacobiana $\mathbf{DF}(\mathbf{y}(k))$.

Dato il punto $\mathbf{y}(k)$, si trovano i suoi N_B primi vicini: $\mathbf{y}^{(r)}(k)$, $r=1,2,\dots,N_B$. Ciascun vicino evolve in un punto noto: $\mathbf{y}^{(r)}(k) \rightarrow \mathbf{y}(r;k+1)$ che sarà in prossimità di $\mathbf{y}(k+1)$ (la notazione serve a distinguere $\mathbf{y}(r;k+1)$, successivo di $\mathbf{y}^{(r)}(k)$, da $\mathbf{y}^{(r)}(k+1)$, r-esimo primo vicino di $\mathbf{y}(k+1)$). Se si definisce una mappa locale che a ciascun vicino associa il suo successivo:

3.5 Calcolo degli esponenti di Lyapunov dai dati sperimentali

$$\mathbf{y}(r; k+1) = \sum_{m=1}^M \mathbf{c}(m, k) \phi_m(\mathbf{y}^{(r)}(k))$$

ove M è la dimensione dello spazio, le funzioni $\phi_m(\mathbf{x})$ formano un sistema di base scelto a priori e i coefficienti locali $\mathbf{c}(m, k)$ sono determinati minimizzando i residui

$$\sum_{r=1}^{N_B} \left| \mathbf{y}(r; k+1) - \sum_{m=1}^M \mathbf{c}(m, k) \phi_m(\mathbf{y}^{(r)}(k)) \right|^2,$$

allora le componenti della matrice Jacobiana sono:

$$DF_{ij}(\mathbf{y}(k)) = \sum_{m=1}^M c_i(m, k) \frac{\partial \phi_m(\mathbf{y}(k))}{\partial y_j(k)}.$$

La matrice Jacobiana così trovata serve a determinare la matrice di Oseledec⁽¹⁰⁾ che deve essere diagonalizzata con la decomposizione ricorsiva QR .

Come si vede questo metodo è oltremodo complesso e richiede un uso particolarmente intensivo delle risorse di calcolo; inoltre i risultati non sono molto affidabili se si dispone di serie sperimentali brevi. D'altro canto per stabilire se un sistema è caotico è sufficiente stimare l'esponente di Lyapunov maggiore (λ_1)⁽¹¹⁾. Fortunatamente esiste un metodo per il calcolo di λ_1 proposto da Sato (Sato et al., 1987) e perfezionato da Rosenstein (Rosenstein et al., 1993) che consente di superare le difficoltà cui si accennava più sopra.

Il metodo di Rosenstein si basa sul fatto che due punti vicini nell'attrattore diano origine a due traiettorie che divergono esponenzialmente con esponente pari all'esponente positivo maggiore di Lyapunov. Se $d(t)$ rappresenta la divergenza media di due traiettorie al tempo t , si avrà allora:

$$d(t) = Ce^{\lambda t} \tag{3.28}$$

con C costante e $\lambda \equiv \lambda_1$.

¹⁰ Si veda il paragrafo precedente.

¹¹ Cfr. par. 3.3.

3. Invarianti della dinamica

Dato dunque un punto dell'attrattore $y(k)$, ed il suo primo vicino $y^{(n)}(k)$, sia $d_k(0)$ la loro distanza. Dopo un tempo $t = j\tau$, dove τ rappresenta il tempo di campionamento e $j = 1, 2, \dots$; in base alla (3.28) la loro distanza sarà:

$$d_k(j\tau) = C_k e^{\lambda j\tau}, \quad (3.29)$$

ove la costante C_k rappresenta la distanza iniziale.

Passando ai logaritmi al (3.29) diviene:

$$\ln d_k(j\tau) = \ln C_k + \lambda j\tau. \quad (3.30)$$

La (3.30) rappresenta un insieme di rette, una per ciascun punto iniziale $y(k)$. L'esponente può allora essere calcolato attraverso un *fit* della linea media definita come:

$$f(j) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \ln d_k(j\tau), \quad (3.31)$$

dove M è il numero di punti sull'attrattore.

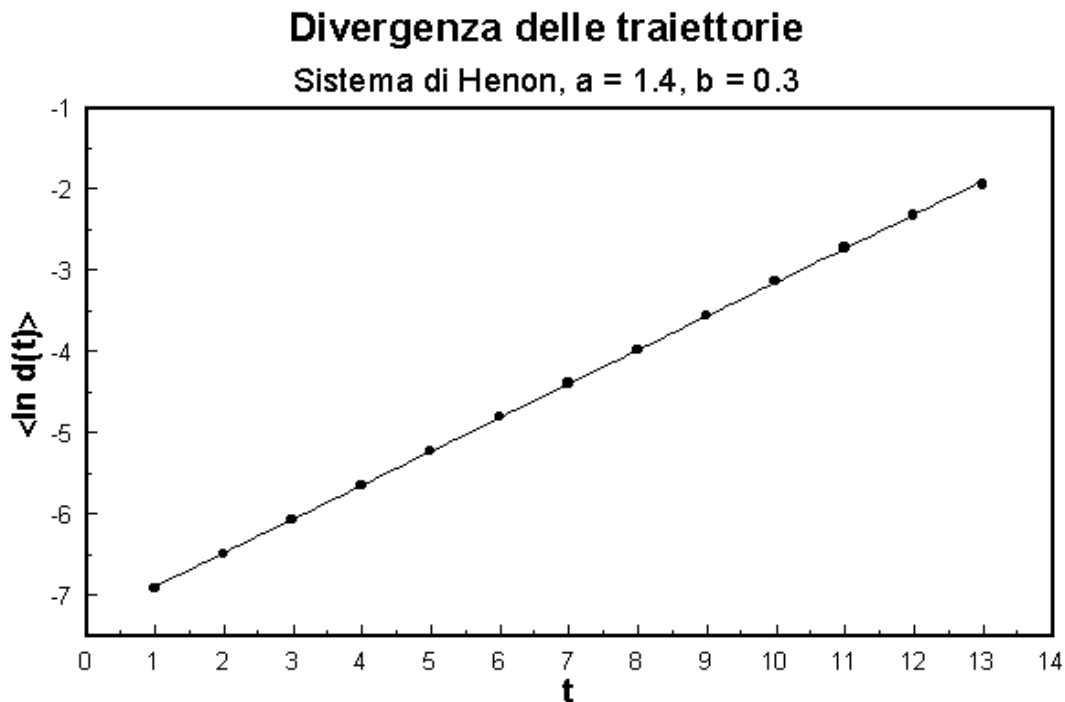


FIGURA 3.10 Divergenza media delle traiettorie per il sistema di Hénon.

3.5 Calcolo degli esponenti di Lyapunov dai dati sperimentali

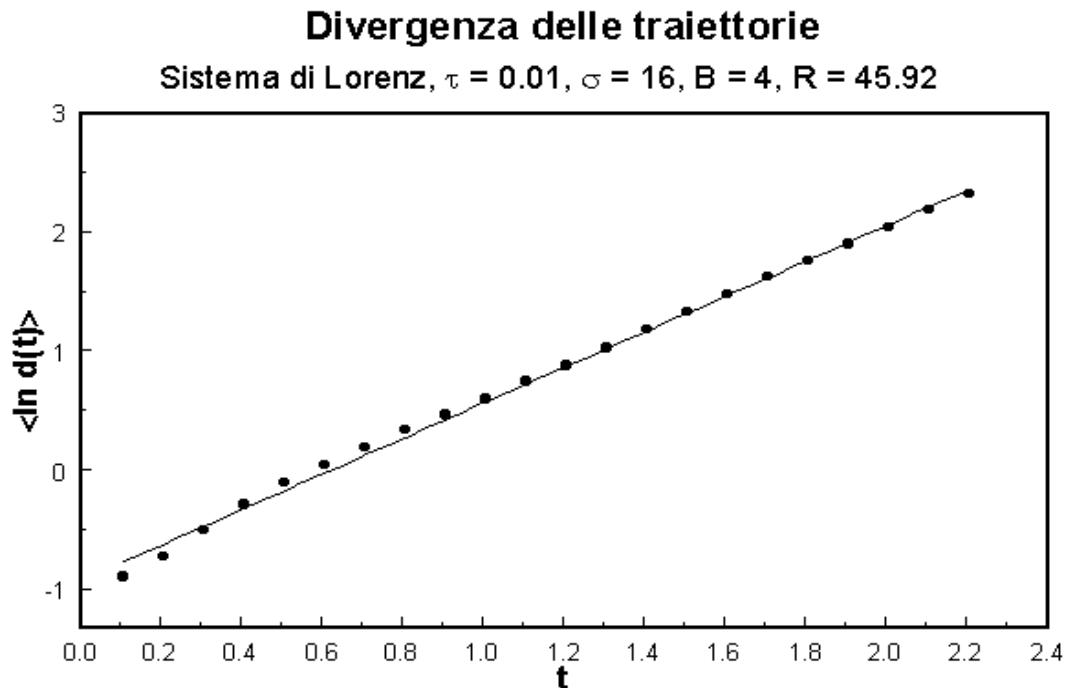


FIGURA 3.11 Divergenza media delle traiettorie per il sistema di Lorenz.

La media nell'equazione (3.31) è la chiave per calcolare valori accurati di λ anche utilizzando serie temporali corte e rumorose.

Nelle figure 3.10 e 3.11 sono rappresentate le rette di equazione (3.31) per il sistema di Hénon e per quello di Lorenz. I valori di λ che si desumono dalle pendenze delle rette sono confrontati in Tabella 3.2 con valori che si trovano in letteratura. Come si vede il metodo di Rosenstein consente di ottenere risultati molto buoni.

ESPONENTE DI LYAPUNOV		
	Valori calcolati	Valori pubblicati
Sistema di Hénon	0.416	0.419
Sistema di Lorenz	1.490	1.502

Tabella 3.2 Confronto dei valori calcolati dell'esponente di Lyapunov con valori pubblicati in letteratura. Il dato relativo al sistema di Hénon si trova in (Peitgen et al., 1992), quello relativo al sistema di Lorenz si trova in (Abarbanel et al., 1993).